χ^2 分布，t 分布，F 分布の基本性質に関する一考察

石　川　忠　孝

1　はじめに

医学，農学，工学のあらゆる分野および人文・社会科学においてさえ，統計的推論が必要となり，広く用いられている。しかし，統計学の基礎概念を正しく理解することは容易なことではない。いろいろの確率分布の法則を数学的に厳密に説明しようとすると高度の数学的知識が必要になる。多くの大学初年級を対象とする統計学のテキストでは，この辺のところは「……が知られている」とか「証明略」と書いて法則を天下り式に与えている。または実例をつかってあっさり説明してしまって数学的根拠を省略している。そこで，3つの代表的な標本分布である χ^2 分布，t 分布，F 分布を取り挙げて，その基本的な性質について考察する。

2　χ^2　分　布

1°　$X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立に $N(0, 1)$ に従うとき，

$X = X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ の分布を，自由度 n の χ^2 分布といい，確率密度関数は

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & (x>0)\\[2ex] 0 & (x\leqq 0)\end{cases}$$

である。

解 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$を正規分布$N(0, 1)$からの大きさnの標本とし，

$$x<X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2<x+h,\ h>0$$

である確率は

$$p(x<X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2<x+h)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\int_s\cdots\int\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)dx_1dx_2\cdots\cdots dx_n$$

と書ける。これはn次元ユークリッド空間における半径がそれぞれ$\sqrt{x}$, $\sqrt{x+h}$の2つの同心球面に囲まれる部分S（体積を$\varDelta V$とする）に含まれる確率である。Sの内部における$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$の値は，外側の球面上の点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$で最小，内側の球面上の点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$で最大である。外側の球面上の各点では

$$e^{-\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{2}}=e^{-\frac{x+h}{2}}$$

また内側の球面上の各点では

$$e^{-\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$$

である。したがって，領域Sの体積を$\varDelta V$とすれば

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{x+h}{2}}\varDelta V<P(x<X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2<x+h)$$
$$<\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{x}{2}}\varDelta V$$

ここで$\varDelta V=K[(x+h)^{\frac{n}{2}}-x^{\frac{n}{2}}]$ （Kは定数）

よって上の不等式をhで割って，$h\to 0$に対する極限を求めると

$$cx^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\leqq\lim_{h\to 0}\frac{P(x<X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2<x+h)}{h}\leqq cx^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$$

ここで$\lim_{h\to 0}\frac{\varDelta V}{h}=K\frac{n}{2}x^{\frac{n}{2}-1}$, $\lim_{h\to 0}e^{-\frac{h}{2}}=1$を用いている。（$c$は定数）

したがってxの確率密度関数を$f(x)$と書くと

$$f(x) = cx^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \qquad (x>0)$$
$$= 0 \qquad (x \leqq 0)$$

ただし，$c\int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx = 1$ であること，および左辺の積分はガンマ関数を用いて $2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ であることがわかるから

$$c = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

よって

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \qquad (x>0)$$
$$= 0 \qquad (x \leqq 0)$$

2° X が χ_n^2 分布に従うとき，$E(X) = n$, $V(X) = 2n$ を証明せよ。

解 X の確率密度関数は

$$f_n(x) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \qquad (x>0)$$
$$= 0 \qquad (x \leqq 0)$$

であるから

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_n(x)dx = \int_0^{+\infty} x\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$
$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}(2t)^{\frac{n}{2}}e^{-t}2dt$$
$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}+1-1}e^{-t}dt \quad (x = 2t \text{ と置換})$$

$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}(2t)^{\frac{n}{2}+1} e^{-t} 2dt = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}+1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n(n+2)$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2n$$

解 2　X が χ_n^2 分布に従うとき，X の確率密度関数は

$$f_n(x) = cx^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \quad (x>0)$$
$$= 0 \qquad\qquad (x \leqq 0)$$

である。よって X の積率母関数は

$$M_X(\theta) = E(e^{\theta X}) = \int_0^{+\infty} e^{\theta x}\cdot(cx^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}})dx = c\int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1-2\theta)x} dx$$

$(1-2\theta)x = u$ とおいて置換積分法を用いて

$$M_X(\theta) = c(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}\int_0^{+\infty} u^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}du = c_1(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}$$

が得られる。ここで $c_1 = \int_0^{+\infty} u^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}du = 1$

となることは，$f(x)$ が確率密度関数であることからわかるので

$$M_X(\theta) = (1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}$$

微分すると

$$M_X'(\theta) = -\frac{n}{2}(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}-1}(-2) = n(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}-1}$$

$$M_X''(\theta) = n\left(-\frac{n}{2}-1\right)(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}-2}(-2) = n(n+2)(1-2\theta)^{-\frac{n+4}{2}}$$

であるから，平均は

$$E(X)=M_X'(0)=n$$

分散は

$$V(X)=M_X''(0)-(M_X'(0))^2=n(n+2)-n^2=2n$$

3° X が $N(0,\ 1)$ に従うならば，X^2 は自由度 1 の χ^2 分布に従う。

解 $Y=X^2$ とおき，任意の正の定数を y とし，$\sqrt{y}=x$ とおくと

$$P(0\leqq Y\leqq y)=P(-\sqrt{y}\leqq X\leqq \sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

ここで $x^2=y$ とすると，$2xdx=dy$

$$dx=\frac{1}{2x}dy=\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$

$$P(0\leqq Y\leqq y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y e^{-\frac{y}{2}}\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\int_0^y\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2}}dy$$

$$=\int_0^y\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}dy=\int_0^y\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}dy$$

よって，Y は自由度 1 の χ^2 分布に従う。すなわち，X^2 は自由度 1 の χ^2 分布に従う。

4° ［χ^2 分布の再生性］ $X,\ Y$ は独立で，それぞれ自由度 $m,\ n$ の χ^2 分布に従うとき，$X+Y$ は自由度 $m+n$ の χ^2 分布に従う。

解 $X,\ Y$ は独立であるから，$(X,\ Y)$ の同時確率密度関数を $f(x,\ y)$ とすると

$$f(x,\ y)=f_m(x)f_n(y)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2^2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$$

$$= c\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} = ce^{-\frac{x+y}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\left(\text{ただし } c = \frac{1}{2^2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)$$

したがって，$z = x + y$ より $y = z - x$ とおいて，x について積分すると

$$f(z) = \int_0^z f(x,\ z-x)dx = ce^{-\frac{z}{2}}\int_0^z\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{z-x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}dx$$

ここで変数変換 $x = zt$ を行うと $\begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow z \\ \hline t & 0 \longrightarrow 1 \end{array}$

$$\begin{aligned} f(z) &= ce^{-\frac{z}{2}}\int_0^1\left(\frac{zt}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left\{\frac{z(1-t)}{2}\right\}^{\frac{n}{2}-1}zdt \\ &= c\cdot 2\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{z}{2}}\int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^{\frac{n}{2}-1}dt \\ &= c\cdot 2\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}B\left(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{2}{2^2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}} \\ &= \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}} \end{aligned}$$

これは，自由度 $m+n$ の χ^2 分布の確率密度関数である。よって $Z = X + Y$ は自由度 $m+n$ の χ^2 分布に従う。

5°　$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ は，独立に同一の正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従うとき，

(1)　$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ は自由度 n の χ^2 分布に従う。

(2)　$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う。

解　(1)　$Y_i = \dfrac{X_i-\mu}{\sigma}$ とおけば，$Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_n$ は独立に $N(0,\ 1)$ に従うか

ら，Y_1^2, Y_2^2, $\cdots$, Y_n^2 はそれぞれ自由度１の χ^2 分布に従う。よって，χ^2 分布の再生性から $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ は自由度 n の χ^2 分布に従う。ゆえに $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ は自由度 n の χ^2 分布に従う。

(2) 次の式で確率変数 ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{n-1} を導入する。

$$X_1-\bar{X}=\frac{1}{\sqrt{1\cdot2}}\xi_1+\frac{1}{\sqrt{2\cdot3}}\xi_2+\frac{1}{\sqrt{3\cdot4}}\xi_3+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}\xi_{n-1} \quad ①$$

$$X_2-\bar{X}=\frac{-1}{\sqrt{1\cdot2}}\xi_1+\frac{1}{\sqrt{2\cdot3}}\xi_2+\frac{1}{\sqrt{3\cdot4}}\xi_3+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}\xi_{n-1} \quad ②$$

$$X_3-\bar{X}=\frac{-2}{\sqrt{2\cdot3}}\xi_2+\frac{1}{\sqrt{3\cdot4}}\xi_3+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}\xi_{n-1} \quad ③$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_n-\bar{X}=-\frac{-(n-1)}{\sqrt{(n-1)n}}\xi_{n-1} \quad ⓝ$$

①−②から

$$X_1-X_2=\sqrt{2}\xi_1$$

である。この左辺は正規分布の再生性から正規分布 $N(0,\ 2\sigma^2)$ に従う。よって ξ_1 は正規分布 $N(0,\ \sigma^2)$ に従う。同様にして①+②−③×２から

$$X_1+X_2-2X_3=\frac{6}{\sqrt{2\cdot3}}\xi_2$$

は正規分布 $N(0,\ 6\sigma^2)$ に従う。よって ξ_2 は正規分布 $N(0,\ \sigma^2)$ に従い，ξ_1 と独立である。以下同様にして $(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_{n-1})$ は互いに独立な正規分布 $N(0,\ \sigma^2)$ に従う確率変数である。一方

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2$$

であるから χ^2 分布の再生性から $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ は $\chi^2(n-1)$ に従う。

6° n が十分大きいとき，X は $B(n,\ p)$ に従うならば $\frac{(X-np)^2}{np(1-p)}$ は近似的に自由度１の χ^2 分布に従う。

解　n が十分大きいとき，X が $B(n,\ p)$ に従うならば $\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ は近似的に $N(0,\ 1)$ に従う。よって $\dfrac{(X-np)^2}{np(1-p)}$ は近似的に自由度 1 の χ^2 分布に従う。

7°　全体が互いに排反な k 個の事象 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k$ に分割され，各 A_i の起こる確率を p_i とする。いま，n 個の独立な試行で事象 A_i の起こる回数を X_i とする。このとき，n が十分大きく，$np_i \geqq 5$ ならば $\sum_{i=1}^{k}\dfrac{(X_i-np_i)^2}{np_i}$ は近似的に自由度 $k-1$ の χ^2 分布に従う。

解　$P=P(X_1=n_1,\ \cdots,\ X_k=n_k)$ とし $n_i-np_i=\varepsilon_i(i=1,\ \cdots,\ k)$ とする。いま，$\dfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{np_i}}=y_i$ とし定数 $a>0$ に対して $(y_1,\ \cdots,\ y_k)$ 空間で連立方程式

$$Y=\sum_{i=1}^{k}y_i^2=a^2,\qquad \sum_{i=1}^{k}\sqrt{np_i}\,y_i=0 \tag{①}$$

で定義される $k-2$ 次元球面 S^{k-2} の内部で確率 $P(Y\leqq a^2)$ を計算する。X_i が 1 だけ変わるとき，y_i の増分は $\pm 1/\sqrt{np_i}$ である。そこで $1/\sqrt{np_i}=\varDelta y_i$ とおく。y_i は①の第 2 式から $k-1$ 個与えれば残りはきまり，多項分布の近似から次の近似式が得られる。

$$P(Y\leqq a^2)\fallingdotseq \sum_{y_1^2+\cdots+y_k^2\leqq a^2}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{k-1}}\sqrt{\frac{n}{np_k}}e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+\cdots+y_k^2)}\varDelta y_1\cdots\varDelta y_{k-1}$$

よって np_i が十分大きいときは，上式は c を定数として次の形の重積分で近似できる。

$$P(Y\leqq a^2)\fallingdotseq \int\cdots\cdots\int_{y_1^2+\cdots+y_k^2\leqq a^2} ce^{-\frac{1}{2}(y_1^2+\cdots+y_k^2)}dy_1\cdots dy_{k-1}$$

この右辺は球面 S^{k-2} の内部での重積分である。よって原点からの距離を $r=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_k^2}$ とするとき，上の積分は次のような r を変数とする定積分で表される。

$$P(Y\leqq a^2)\fallingdotseq \int_0^a c'e^{-\frac{1}{2}r^2}r^{k-2}dr \tag{②}$$

ここで $a=\infty$ のとき，積分値は 1 となる。この積分を $r^2=2t$ と変数変換して計算する。

$$\int_0^\infty c'e^{-t}(2t)^{\frac{k}{2}-1}\sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=c'2^{\frac{k-3}{2}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{k-3}{2}}dt=c'2^{\frac{k-3}{2}}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)=1$$

この c' の値を②に代入し，さらに $r^2=x$ と変数変換すると

$$P(Y\leqq a^2)\fallingdotseq\int_0^{a^2}\frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k-3}{2}}dx$$

この被積分関数は自由度 $k-1$ の χ^2 分布の確率密度関数である。ゆえに np_i が十分大きいとき，$Y=\sum_{i=1}^{k}\frac{(X_i-np_i)^2}{np_i}$ は近似的に自由度 $k-1$ の χ^2 分布に従う。

3 t 分布

1° X, Y が独立で，X は $N(0, 1)$ に従い，Y が自由度 n の χ^2 分布に従うとき，$U=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ の分布が自由度 n の t 分布といい，確率密度関数は

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\quad(n\geqq 1)$$

である。

解 X は $N(0, 1)$ に従うから，その確率密度関数は $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$Y$ は自由度 n の χ^2 分布に従うから，その確率密度関数は

$$g(y)=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}\quad(y>0)$$

いま，$u=\varphi_1(x, y)=\frac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}}$, $v=\varphi_2(x, y)=y$ とおけば，この変換は xy 平面の $y>0$ の部分を uv 平面の $v>0$ の部分にうつす 1 対 1 の変換であるから，こ

れを x, y について解けば

$$x=\psi_1(u,\ v)=u\sqrt{\frac{v}{n}},\ y=\psi_2(u,\ v)=v$$

となるから，ヤコービアンは

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sqrt{\dfrac{v}{n}} & \dfrac{v}{2\sqrt{nv}}\\[2ex] 0 & 1\end{vmatrix}=\sqrt{\frac{v}{n}}$$

したがって，$U=\varphi_1(X,\ Y)$, $V=\varphi_2(X,\ Y)$ の同時確率密度関数は $v>0$ のとき

$$h_1(u,\ v)=h(x,\ y)\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right|=ce^{-\frac{u^2v}{2n}}v^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{v}{2}}\sqrt{\frac{v}{n}}=c'v^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{v}{2}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}$$

（c' は定数）

$V=\varphi(X,\ Y)=Y$ は負の値をとらないから，$v\leqq 0$ のとき $h_1(u,\ v)=0$ とする。

これより U の周辺確率密度関数を求めれば

$$f_1(u)=\int_{-\infty}^{\infty}h_1(u,\ v)dv=c'\int_0^{\infty}v^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{v}{2}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}dv$$

$\dfrac{v}{2}(1+\dfrac{u^2}{n})=t$ とおいて，変数 v を変数 t に変えれば（u を固定する）

$$f_1(u)=c'\cdot 2^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^{\infty}t^{\frac{n-1}{2}}e^{-t}dt$$

右辺の積分は定数であるから，他の定数とまとめて，これをあらためて c'' とおくと

$$f_1(u)=c''\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

この c'' は $\int_{-\infty}^{\infty}f(u)d\,u=1$ を用いて求めることができて，その値は

$$c'' = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

したがって

$$f_1(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

となる。ここで $u=x$ とおくと，確率密度関係は

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

2°　X は自由度 n の t 分布に従う確率変数とする。

(1)　$n>1$ のとき期待値 $E(X)=0$ で，$n=1$ のとき $E(X)$ は存在しない。

(2)　$n>2$ のとき分散 $V(X)=\dfrac{n}{n-2}$ で，$n=1,\ 2$ のとき $V(X)$ は存在しない。

解　確率密度関数は $f_n(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \text{ である。}$$

(1)　$$\int_{-\infty}^{\infty} x\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx = \begin{cases} \dfrac{-n}{n-1}\left[\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 & (n>1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}[\log(1+x^2)]_{-\infty}^{\infty} \text{ は発散} & (n=1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

よって $n>1$ のとき $E(X)=0$ であるが，$n=1$ のとき $E(X)$ は存在しない。

(2)　$I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$ とおく。変数変換 $1+\dfrac{x^2}{n}=\dfrac{1}{1-t}$ を用いると x

$\geqq 0$ で

$$x^2=\frac{nt}{1-t},\quad x=\sqrt{n}\sqrt{\frac{t}{1-t}},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{n}}{2}\sqrt{\frac{1-t}{t}}\frac{1}{(1-t)^2}$$

また I_n は偶関数の積分だから

$$\begin{aligned}I_n&=2\int_0^\infty x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx\\&=2n\int_0^1\frac{t}{1-t}(1-t)^{\frac{n+1}{2}}\frac{\sqrt{n}}{2}\sqrt{\frac{1-t}{t}}\cdot\frac{1}{(1-t)^2}dt\\&=n\sqrt{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{n}{2}-2}dt\end{aligned}$$

この積分は $n>2$ のときは収束するが，$n\leqq 2$ では発散である。$n>2$ のとき

$$I_n=n\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2}-1,\ \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore E(X^2)=\frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}\right)}I_n=\frac{n\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2}-1,\ \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{n}{n-2}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{n}{n-2}$$

$n=1,\ 2$ では $V(T)$ は存在しない。

3° $X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n$ が独立で，どれも $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従うとき，$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{U/\sqrt{n}}$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。

解 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は $N(0,\ 1)$ に従い，χ^2 分布の性質 5° より $V=\dfrac{(n-1)U^2}{\sigma^2}=\dfrac{nS^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ が $\chi^2(n-1)$ に従う。これら T と V は独立だから，t 分布の定義より

$$\frac{T}{\sqrt{V/(n-1)}}=\frac{\dfrac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)U^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{U^2}{\sigma^2}}}=\frac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\times\sqrt{\frac{\sigma^2}{U^2}}$$

$$=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{U^2/n}}=\frac{\bar{X}-\mu}{U/\sqrt{n}}$$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。

4° $X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_{n_A}$ は独立に $N(\mu_A,\ \sigma_A^2)$ に従い，$Y_1,\ Y_2,\ \cdots\cdots,\ Y_{n_B}$ は独立に $N(\mu_B,\ \sigma_B^2)$ に従い $\sigma_A^2=\sigma_B^2$ のとき

$$\bar{X}=\frac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{n_A}X_i,\qquad U_A^2=\frac{1}{n_A-1}\sum_{i=1}^{n_A}(X_i-\bar{X})^2$$

$$\bar{Y}=\frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B}Y_i,\qquad U_B^2=\frac{1}{n_B-1}\sum_{i=1}^{n_B}(Y_i-\bar{Y})^2$$

とおけば

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{n_A}+\dfrac{1}{n_B}\right)U^2}}\quad ここに\ U^2=\frac{(n_A-1)U_A^2+(n_B-1)U_B^2}{(n_A-1)+(n_B-1)}$$

は自由度 $(n_A-1)+(n_{B-1})=n_A+n_B-2$ の t 分布に従う。

解 $\sigma_A^2=\sigma_B^2=\sigma^2$ とおく。

$\bar{X}$ は $N\left(\mu_A,\ \dfrac{\sigma^2}{n_A}\right)$ に従い，$\bar{Y}$ は $N\left(\mu_B,\ \dfrac{\sigma^2}{n_B}\right)$ に従う。

したがって，$\bar{X}$ と $\bar{Y}$ の独立性および正規分布の再生性により，統計量 $\bar{X}-\bar{Y}$ の分布は $N\left(\mu_A-\mu_B,\ \dfrac{\sigma^2}{n_A}+\dfrac{\sigma^2}{n_B}\right)$ である。よって $T_1=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_A-\mu_B)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_A}+\dfrac{1}{n_B}}}$ は $N(0,\ 1)$ に従う。また，$\dfrac{(n_A-1)U_A^2}{\sigma^2}=\dfrac{n_AS_A^2}{\sigma^2}$，$\dfrac{(n_B-1)U_B^2}{\sigma^2}=\dfrac{n_BS_B^2}{\sigma^2}$ はそれぞれ $\chi^2(n_A-1)$，$\chi^2(n_B-1)$ に従い，この 2 つは独立だから，χ^2 分布の再生性により $T_2=\dfrac{(n_A-1)U_A^2}{\sigma^2}+\dfrac{(n_B-1)U_B^2}{\sigma^2}=\dfrac{(n_A+n_B-2)U^2}{\sigma^2}$ は自由度 n_A+n_B-2 の χ^2 分布に従う。

この T_1，T_2 は独立だから，t 分布の定義より

$$\frac{T_1}{\sqrt{\dfrac{T_2}{n_A+n_B-2}}}=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{n_A}+\dfrac{1}{n_B}\right)U^2}}$$ は自由度 n_A+n_B-2 の t 分布に従う。

4　F　分　布

1° X, Y が独立で，それぞれ $\chi^2(m)$, $\chi^2(n)$ に従うとき，$T=\dfrac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$ の分布を自由度 (m, n) の F 分布といい，確率密度関数は

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

である。

解　(X, Y) は独立だから (X, Y) の2次元同時密度関数は次式で得られる。

$$g(x, y)=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}x^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}\quad(x>0,\ y>0)$$

一方，$x+y=u$, $\dfrac{y}{n}v=\dfrac{x}{m}$ から x, y について解いてヤコビアンを計算する。

$$x=\frac{muv}{n+mv},\ y=\frac{nu}{n+mv}\quad\therefore\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{mv}{n+mv} & \dfrac{mnu}{(n+mv)^2}\\ \dfrac{n}{n+mv} & \dfrac{-mnu}{(n+mv)^2}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-mnu}{(n+mv)^2}$$

よって2次元同次確率変数 (u, v) の確率密度関数 $h(u, v)$ は次式で得られる。

$$h(u, v)=g\left(\frac{muv}{n+mv},\ \frac{nu}{n+mv}\right)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{muv}{n+mv}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{nu}{n+mv}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}\frac{mnu}{(n+mv)^2}$$

$$=\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}v^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n+mv)^{\frac{m+n}{2}}}\cdot u^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}$$

χ^2 分布の確率密度関数の積分から

$$\int_0^\infty u^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}du=2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)$$

である。よって T の確率密度関数は次の周辺密度関数である。

$$\int_0^\infty h(u,\ v)du=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\frac{v^{\frac{m}{2}-1}}{(mv+n)^{\frac{m+n}{2}}}$$

ここで $v=x$ とおくと，確率密度関数は

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

2°　X は自由度 $(n_1,\ n_2)$ の F 分布に従う確率変数とするとき

(1)　$n_2>2$ のとき期待値 $E(X)=\dfrac{n_2}{n_2-2}$ で $n_2\leqq 2$ のときに $E(X)$ は存在しない。

(2)　$n_2>4$ のとき分散 $V(X)=\dfrac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$，$n_2\leqq 4$ のとき $V(X)$ は存在しない。

解　確率密度関数は $f(x)=\dfrac{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{2}\right)}\cdot\dfrac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$ である。

(1)　変数変換 $\dfrac{n_1x}{n_1x+n_2}=y$ を用いると $x=\dfrac{n_2}{n_1}\dfrac{y}{1-y}$ で $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{n_2}{n_1}\dfrac{1}{(1-y)^2}$ だ

から

$$\int_0^\infty x\cdot\frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}dx=\int_0^1\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\left(\frac{n_2y}{1-y}+n_2\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\cdot\frac{n_2}{n_1}\frac{1}{(1-y)^2}dy$$

$$=\frac{1}{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}\cdot\frac{n_2}{n_1}\int_0^1 y^{\frac{n_1}{2}}(1-y)^{\frac{y_2}{2}-2}dy$$

$$=\frac{1}{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}\cdot\frac{n_2}{n_1}B\left(\frac{n_1}{2}+1,\ \frac{n_2}{2}-1\right)\quad(n_2>2)$$

$n_2\leqq 2$ のときこの積分は収束しない。そして $n_2>2$ のとき

$$E(X)=\frac{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{2}\right)}\cdot\frac{1}{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}\cdot\frac{n_2}{n_1}B\left(\frac{n_1}{2}+1,\ \frac{n_2}{2}-1\right)$$

$$=\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{\frac{n_1}{2}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\left(\frac{n_2}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-1\right)}=\frac{n_2}{n_2-2}$$

(2) 上と同じ変数変換で，$n_2>4$ のとき次の計算ができる。

$$\int_0^\infty x^2\cdot\frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}dx=\int_0^1\left(\frac{n_2}{n_1}\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{n_1}{2}+1}\left(\frac{n_2y}{1-y}+n_2\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}\cdot\frac{n_2}{n_1}\cdot$$

$$\frac{1}{(1-y)^2}dy=\frac{n_2^{\frac{n_2}{2}+1}}{n_1^{\frac{n_1}{2}+1}}\cdot\frac{1}{n_2^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\cdot\frac{n_2}{n_1}\int_0^1\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{n_1}{2}+1}\cdot(1-y)^{\frac{n_1+n_2}{2}}\cdot$$

$$\frac{1}{(1-y)^2dy}=\frac{1}{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}\cdot\frac{n_2^2}{n_1^2}\int_0^1 y^{\frac{n_1}{2}+1}(1-y)^{\frac{n_2}{2}-3}dy$$

$$=\frac{1}{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}\cdot\frac{n_2^2}{n_1^2}B\left(\frac{n_1}{2}+2,\ \frac{n_2}{2}-2\right)$$

$$\therefore E(X^2)=\frac{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{2}\right)}\cdot\frac{1}{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}\cdot\frac{n_2^2}{n_1^2}B\left(\frac{n_1}{2}+2,\ \frac{n_2}{2}-2\right)$$

$$= \frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot \frac{\left(\frac{n_1}{2}+1\right)\left(\frac{n_1}{2}\right)}{\left(\frac{n_2}{2}-1\right)\left(\frac{n_2}{2}-2\right)} = \frac{n_2^2(n_1+2)}{n_1(n_2-2)(n_2-4)}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2)-(E(X))^2 = \frac{n_2^2(n_1+2)}{n_1(n_2-2)(n_2-4)} - \frac{n_2^2}{(n_2-2)^2}$$

$$= \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$$

3° $X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_{n_A}$ は独立に $N(\mu_A,\ \sigma_A^2)$ に従い，$Y_1,\ Y_2,\ \cdots\cdots,\ Y_{n_B}$ は独立に $N(\mu_B,\ \sigma_B^2)$ に従うとき

$$\bar{X} = \frac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{n_A} X_i,\ U_A^2 = \frac{1}{n_A-1}\sum_{i=1}^{n_A}(X_i-\bar{X})^2$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} Y_i,\ U_B^2 = \frac{1}{n_B-1}\sum_{i=1}^{n_B}(Y_i-\bar{Y})^2$$

とおけば

$T = \dfrac{U_A^2/\sigma_A^2}{U_B^2/\sigma_B^2}$ は自由度 $(n_A-1,\ n_B-1)$ の F 分布に従う。

解 $X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_{n_A}$ は独立に $N(\mu_A,\ \sigma_A^2)$ に従うから $\dfrac{n_AS^2}{\sigma_A^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_A}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_A^2}$ $= \dfrac{(n_A-1)U_A^2}{\sigma_A^2}$ は自由度 n_A-1 の χ^2 分布に従う。同様に $\dfrac{n_BS^2}{\sigma_B^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_B}(Y_i-\bar{Y})^2}{\sigma_B^2}$ $= \dfrac{(n_B-1)U_B^2}{\sigma_B^2}$ は自由度 n_B-1 の χ^2 分布に従う。2 組の標本は独立であるから，$\bar{X},\ \bar{Y}$ は独立であり，$U_A^2,\ U_B^2$ も独立である。

よって $\dfrac{(n_A-1)U_A^2}{\sigma_A^2},\ \dfrac{(n_B-1)U_B^2}{\sigma_B^2}$ も独立であるから

$$T = \frac{\dfrac{(n_A-1)U_A^2}{\sigma_A^2}\Big/(n_A-1)}{\dfrac{(n_B-1)U_B^2}{\sigma_B^2}\Big/(n_B-1)} = \frac{\dfrac{U_A^2}{\sigma_A^2}}{\dfrac{U_B^2}{\sigma_B^2}}$$

は自由度 $(n_A-1,\ n_B-1)$ の F 分布に従う。

5　ま　と　め

統計学では代表的な標本分布は χ^2 分布，t 分布，F 分布の3つである。いずれも統計において大切な標本分布である。これらの分布の導出の積分などは統計学自体の理解のためには，必ずしも必要でない。また，その他の基本性質を証明するにも高度な数学理論が必要である。したがって，数学科の学生を対象とする統計学を除いて，一般の学生には証明を省略するのは妥当である。これらを大学初年級に教えるには，学生が無理なく納得するようにいかに上手に説明するかは指導者の腕の見せどころであるが，要は学生が十分理解すると同時に使えるようにすることが大切である。χ^2 分布，t 分布，F 分布に従う統計量はどのようにして作られるかということを明確に理解記憶しておかなければならない。

参　考　文　献

1) 石井博昭・塩出省吾・新森修一共著「確率統計の数理」裳華房，1995年，p 51～p 54
2) 小寺平治著「新統計入門」裳華房，1998年，p 64～p 70
3) 小寺平治著「明解演習　数理統計」共立出版，1997年，p 57～p 61，p 75，p 100～p 102
4) 久保応助・藤沢偉作共著「全問精解　確率・統計演習」聖文社　平成元年，p 124～p 138
5) 国沢清典著「統計学初歩」日本評論社　1974年，p 37～p 39
6) 丸山儀四郎著「確率および統計」共立出版　昭和33年，p 52～p 54，p 145～p 155
7) 成實清松・坂井忠次共著「数理統計学要説　増訂版」培風館　昭和33年，p 94～p 100，p 102～p 112
8) 佐藤良一郎著「数理統計学概説」培風館，昭和25年　p 247～p 263
9) 和田秀三著「基本演習　確率統計」サイエンス社，1999年，p 62～p 79