仮説検定の2種類の誤りと検出力に関する一考察

石　川　忠　孝

1　はじめに

統計学の初学者にとって理解しにくい一つに，仮説検定の第1種の誤りと第2種の誤りがある。結果の表現を見ると，その人がどのくらい正しく統計的方法を理解しているかが分かると言われる。特に，検定における2種類の誤りの意味を理解しているかどうかが微妙なニュアンスの違いになって現れる。そこで，2種類の誤りの定義とその確率の求め方および検出力について考察する。

2　第1種の誤りと第2種の誤り

検定統計量が棄却域にはいるかどうかが検定の判断基準である。帰無仮説 H_0 は文字通り「無に帰する（棄却する）ことが目的の仮説」であるのに対して，対立仮説 H_1 は帰無仮説 H_0 が棄却されたときに支持するための受け皿となる仮説である。したがって，棄却するかどうかを問題にするのは帰無仮説だけである。そこで，第1種の誤りと第2種の誤りの定義は，帰無仮説 H_0 に着目して，テキストは，普通「第1種の誤りは帰無仮説 H_0 が真なのに，H_0 を棄却してしまう誤り」であり，「第2種の誤りは帰無仮説 H_0 が偽なのに，H_0 を採択してしまう誤り」であると書いている。式で表現すれば

$$\alpha = \text{有意水準} = \text{第1種の誤り} = P(\{H_0 \text{を棄却} \mid H_0 \text{が真}\})$$

$$\beta = \text{第2種の誤り} = P(\{H_0 \text{を採択} \mid H_0 \text{が偽}\}) = 1 - P(\{H_0 \text{を棄却} \mid H_0 \text{が偽}\})$$

母集団における真偽の状態と統計的判断には表1のように4組の可能性があ

表1

仮説の真偽	検定による判断	
	H_0 採択 (H_1 棄却)	H_0 棄却 (H_1 採択)
H_0 は真 (H_1 は偽)	正しい判断 (確率 $1-\alpha$)	第1種の誤り (確率 α = 有意水準)
H_0 は偽 (H_1 は真)	第2種の誤り (確率 β)	正しい判断 (確率 $1-\beta$ = 検出力)

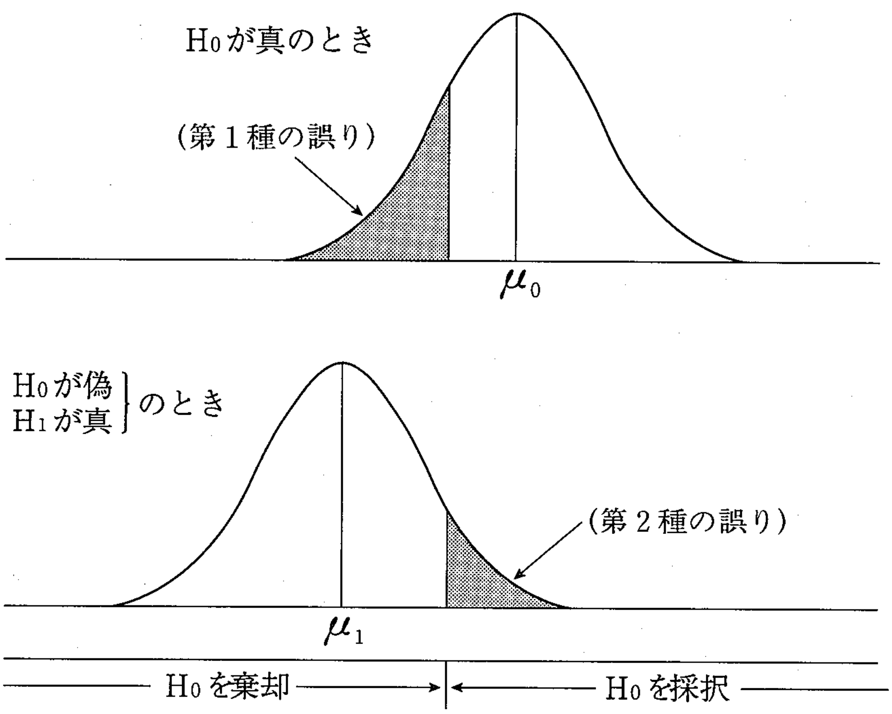


図1 第1種の誤りの確率と第2種の誤りの確率

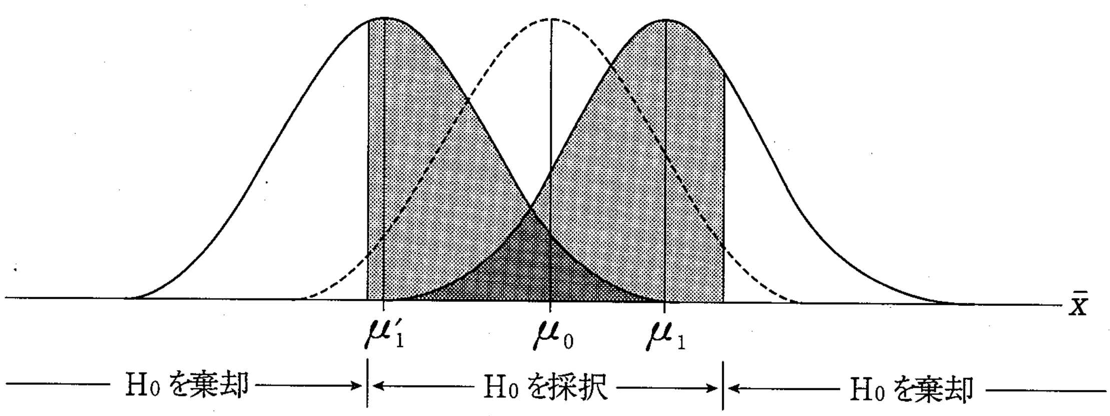


図2 両側検定のときの第2種の誤りの確率

る。β が求められるためには，H_0 でない場合にどうなるかという，もう１つの仮説 H_1 が必要となる。そこで，$\beta = P(\{H_0$ を採択 $| H_1$ が真$\}) = P(\{H_1$ が棄却 $| H_1$ が真$\})$ によって求めねばならない。したがって，対立仮説 H_1 の内容が明確でないと計算できない。

普通「第２種の誤りは帰無仮説 H_0 が偽なのに，H_0 を採択してしまう誤り」と定義している。これでは第２種の誤りの確率 β の求め方がわからない。ところで，「第２種の誤りは対立仮説 H_1 が真のとき，H_1 を棄却してしまう誤り」と定義すると，β の求め方がわかり易い。また，２種類の誤りの違いも明確になる。次の例題により２種類の誤りと β の求め方の理解を図る。

例題１　袋の中の球の構成は

(a)　赤球３個と黒球７個　または(b)　赤球６個と黒球４個のどちらかである。(a)を帰無仮説 H_0，(b)を対立仮説 H_1 に選ぶ。この袋から２個の球を非復元抽出でとるとき，少なくとも１個が黒球であれば H_0 を採択し，それ以外のときは H_0 を棄却する。この検定の第１種と第２種の誤りの確率を求めよ。

解　取り出した２個の球のうち，黒球の数をXとする。

第１種の誤りは，H_0 が真のとき，これを棄却する誤りであるから，その確率は

$$\alpha = P(\{H_0 \text{ を棄却} \mid H_0 \text{ が真}\}) = P(\{X = 0 \mid \text{赤球3個，黒球7個}\})$$
$$= \frac{{}_3C_2 \cdot {}_7C_0}{{}_{10}C_2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

一方，第２種の誤りは，H_1 が真のとき H_0 を採択する誤りであるから，その確率は

$$\beta = P(\{H_0 \text{ を採択} \mid H_1 \text{ が真}\}) = P(\{X \neq 0 \mid \text{赤球6個，黒球4個}\})$$
$$= 1 - P(\{X = 0 \mid \text{赤球6個，黒球4個}\}) = 1 - \frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_0}{{}_{10}C_2} = \frac{2}{3}$$

別解　第２種の誤りは，H_1 が真のとき H_1 を棄却する誤りであるともいえるから

$$\beta = \mathrm{P}(\{\mathrm{H}_1 \text{を棄却} \mid \mathrm{H}_1 \text{が真}\}) = \mathrm{P}(\{\mathrm{X} \fallingdotseq 0 \mid \text{赤球6個，黒球4個}\})$$
$$= \frac{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_0 + {}_6\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \frac{2}{3}$$

例題2　将棋部のホープ春男と秋男の来月の対戦は8局の予定である。春男の勝数Xについて，帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mathrm{X} = 4$ を有意水準0.05で検定したい。

(1)　対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mathrm{X} \neq 4$ のとき，棄却域Wと，この両側検定によって第1種の誤りを犯す確率 α を求めよ。

(2)　対立仮説 $\mathrm{H}_1' : \mathrm{X} > 4$ のとき，棄却域 W′ と，この右側検定によって第1種の誤りを犯す確率 α' を求めよ。

(3)　対立仮説 $\mathrm{H}_1'' : \mathrm{X} = 6$ のとき，この右側検定によって第2種の誤りを犯す確率 β'' を求めよ。

解　(1)　$\mathrm{H}_0 : \mathrm{X} = 4$（棋力互角）のとき，春男の勝率は1/2だから

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = {}_8\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{8-k} = \frac{{}_8\mathrm{C}_k}{2^8}$$

これを計算すれば表2のようになる。

表2

X	P
0	0.0039
1	0.0312
2	0.1094
3	0.2188
4	0.2734
5	0.2188
6	0.1094
7	0.0312
8	0.0039
計	1.0000

したがって，両側検定だから

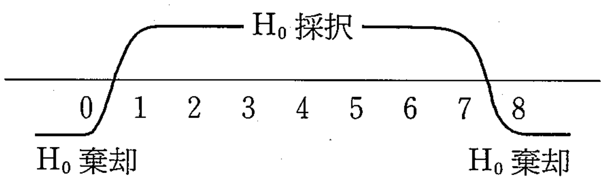
$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqq k_1) \leqq 0.025$ なる最大の k_1 は，$k_1 = 0$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqq k_2) \leqq 0.025$ なる最小の k_2 は，$k_2 = 8$

$$\therefore \mathrm{W} = \{0,\ 8\}$$

よって

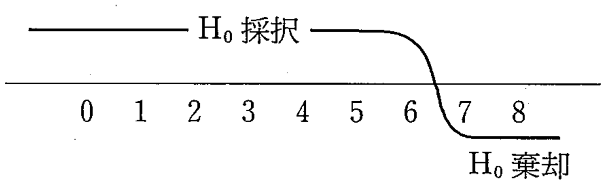
$$\alpha = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 8)$$
$$= 0.0039 + 0.0039 = 0.0078$$



(2)　右側検定だから

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqq k) < 0.05$ なる最小の k は，$k = 7$

$$\therefore \mathrm{W}' = \{7,\ 8\}$$



よって

$$\alpha' = P(X=7)+P(X=8)$$
$$= 0.0312+0.0039 = 0.0351$$

(3)　H_1''：$X=6$ のとき，春男の勝率は6/8だから

$$P(X=k) = {}_8C_k\left(\frac{6}{8}\right)^k\left(\frac{2}{8}\right)^{8-k}$$

これを計算すれば表3のようになる。

右側検定だから(2)より $W'' = \{7,\ 8\}$

よって

$$\beta'' = P(\{H_0\text{を採択}\mid H_0\text{が偽}\})$$
$$= 1-P(\{H_0\text{を棄却}\mid H_0\text{が真}\})$$
$$= P(\{H_1''\text{を棄却}\mid H_1''\text{が真}\})$$
$$= P(X=0)+P(X=1)+\cdots+P(X=6) = 1-\{P(X=7)+P(X=8)\}$$
$$= 1-\left\{{}_8C_7\left(\frac{6}{8}\right)^7\left(\frac{2}{8}\right)+{}_8C_8\left(\frac{6}{8}\right)^8\right\} = 1-(0.267+0.100) = 0.633$$

表 3

X	P
0	0.0000
1	0.0004
2	0.0038
3	0.0231
4	0.0865
5	0.2076
6	0.3115
7	0.2670
8	0.1001
計	1.0000

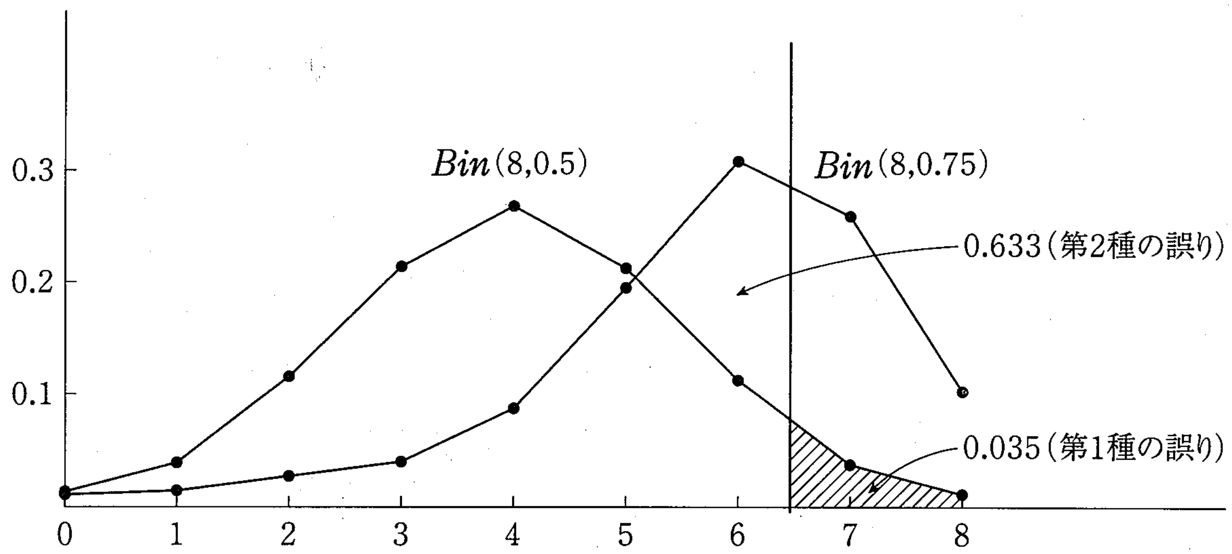


図 3

注　例題は「帰無仮説 H_0：$X=4$ を有意水準0.05で検定したい」となっている。一方，α = 有意水準 = 第1種の誤り = $P(\{H_0\text{を棄却}\mid H_0\text{が真}\})$ であるにもかかわらず，(1)では $\alpha=0.0078$，(2)では $\alpha'=0.0351$ になっている。この場

合，正確には「帰無仮説 H_0：$X=4$ を有意水準0.05以下で検定したい」というべきである。

有意水準をどの程度にとるかは，検定する問題によって判断するのであるが，0.05または0.01以下という数字がよく使われる。通常，0.05以下というのを略して，有意水準0.05という。

3　検出力と検出力関数

第2種の誤りを犯さない確率を検出力という。すなわち

検出力 ＝1－ 第2種の誤りの確率 ＝ 対立仮説が真のとき帰無仮説を棄却する確率である。検出力は帰無仮説が偽のとき，それを棄却する確率となるから，検出力をできるだけ大きくするような検定方法がよいということになる。有意水準（第1種の誤りの確率）を小さくすると第2種の誤りの確率が大きくなる（検出力が低くなる），というトレード・オフの関係にある。図4は有意水準と検出力の関係を示している。

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$（μ：未知，σ^2：既知）における μ の仮説検定を取り上げ，検出力を考える。

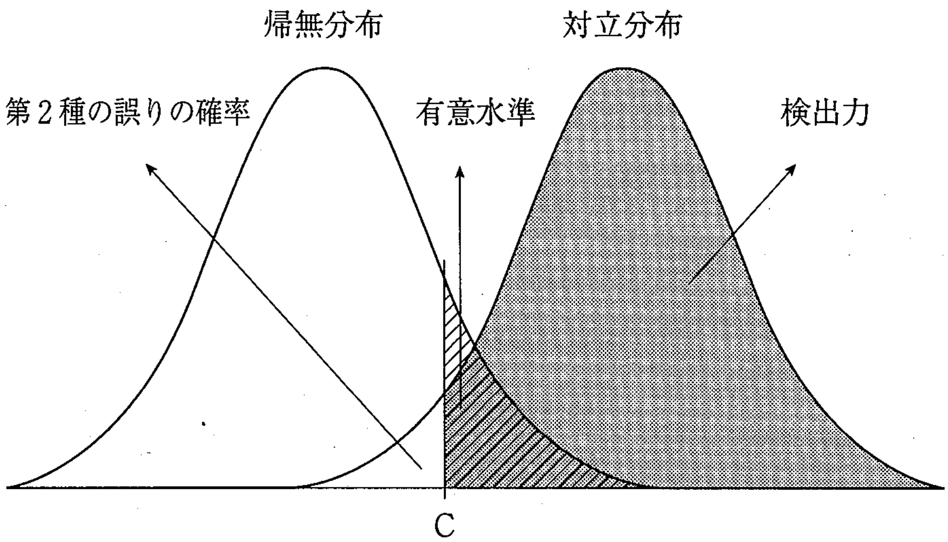


図4　有意水準と検出力

(1)　3つの検定法 w_1, w_2, w_3 の検出力

検定したい仮説は $H_0：\mu=\mu_0$ である。この仮説の有意水準0.05の検定方法は

右片側検定

$$w_1：\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>1.65$$

左片側検定

$$w_2：\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<-1.65$$

両側検定

$$w_3：\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>1.96$$

の3つの検定法である。仮説 H_0 が間違っていて，$\mu=\mu_1(\mu_1\fallingdotseq\mu_0)$ のときの検出力，つまり $\mu=\mu_1$ のとき仮説 H_0 を棄却する確率を $\gamma(\mu_1)$ と書く。$\mu_1=\mu_0$ とおくと $\gamma(\mu_0)$ は仮説 H_0 が真であるとき仮説 H_0 を棄却する確率となるから，この3つの検定のどれに対しても，$\gamma(\mu_0)=0.05$ である。

右片側検定 (w_1)

$$\begin{aligned}\gamma(\mu_1)&=P\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>1.65\,\middle|\,\mu=\mu_1\right\}\\&=P\left\{\overline{X}>\mu_0+1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\middle|\,\mu=\mu_1\right\}\\&=P\left\{\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}+1.65\,\middle|\,\mu=\mu_1\right\}\\&=P\left\{z>\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}+1.65\right\}\\&=1-\Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}+1.65\right)\\&=\Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}-1.65\right)\qquad(1)\end{aligned}$$

検出力は μ_1 の関数となるから，これを μ_1 の関数としてみたとき，検出力関数と

いう。

左片側検定 (w_2)

$$\gamma(\mu_1) = \mathrm{P}\left\{\frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -1.65 \,\middle|\, \mu=\mu_1\right\}$$

$$= \mathrm{P}\left\{\overline{\mathrm{X}} < \mu_0 - 1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu=\mu_1\right\}$$

$$= \mathrm{P}\left\{\frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.65 \,\middle|\, \mu=\mu_1\right\}$$

$$= \mathrm{P}\left\{z < \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.65\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.65\right) \tag{2}$$

両側検定 (w_3)

$$\gamma(\mu_1) = \mathrm{P}\left|\frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -1.96 \text{ または } \frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > 1.96 \,\middle|\, \mu=\mu_1\right\}$$

$$= \mathrm{P}\left\{\overline{\mathrm{X}} < \mu_0 - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu=\mu_1\right\} + \mathrm{P}\left\{\overline{\mathrm{X}} > \mu_0 + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu=\mu_1\right\}$$

$$= \mathrm{P}\left\{\frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.96 \,\middle|\, \mu=\mu_1\right\} + \mathrm{P}\left\{\frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + 1.96 \,\middle|\, \mu=\mu_1\right\}$$

$$= \mathrm{P}\left\{z < \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.96\right\} + \mathrm{P}\left\{z > \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + 1.96\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.96\right) + \Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.96\right) \tag{3}$$

具体的に，$\sigma = 3.0$，$\mu_0 = 20.0$，$n = 9$ の場合に対して，3 つの検定法 w_1，w_2，w_3 の検出力を計算すると表 4 のようになる。

この計算結果をグラフにしたもの，つまり検出力関数のグラフは図 5 のようになる。

図 5 から次のことがわかる。

① 右片側検定は，仮説 H_0：$\mu = 20.0$ が間違っていて，$\mu > 20$ のときには

表４　３つの検定の検出力 $\left(\begin{array}{l}\sigma = 3.0\\ \mu_0 = 20.0\end{array},\ n = 9\right)$

μ_1	$\gamma(\mu_1)$		
	右片側検定 (w_1)	左片側検定 (w_2)	両側検定 (w_3)
15.0	0.0000	0.9999	0.9988
16.0	0.0000	0.9906	0.9793
17.0	0.0000	0.9115	0.8508
18.0	0.0000	0.6368	0.5160
19.0	0.0040	0.2578	0.1700
20.0	0.05	0.05	0.05
21.0	0.2578	0.0040	0.1700
22.0	0.6368	0.0000	0.5160
23.0	0.9115	0.0000	0.8508
24.0	0.9906	0.0000	0.9793
25.0	0.9999	0.0000	0.9988

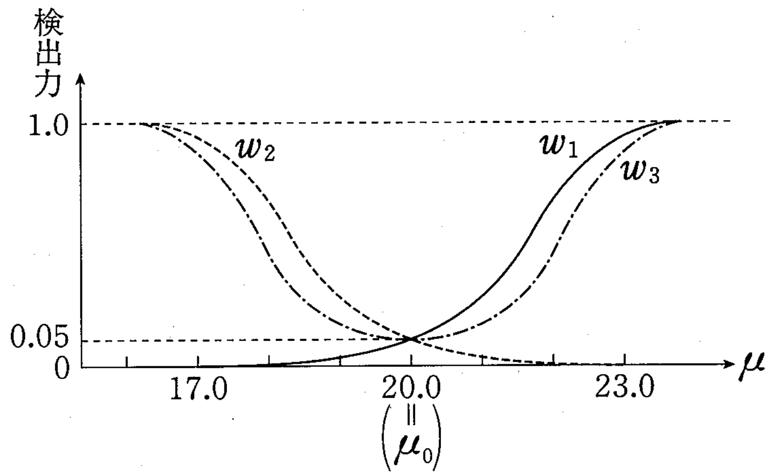


図５　３つの検定 w_1, w_2, w_3 の検出力関数

検出力は大きいが，$\mu < 20$ のときは検出力は非常に小さい。したがって右片側検定は，真の μ の値として，$\mu < 20$ ということはありえないことがはっきりしている場合にのみ用いるべきである。

② ①と同じ考察により，左片側検定は，真の μ の値として，$\mu > 20$ ということはありえないという場合にのみ用いるべきである。

③ 両側検定は，真の μ の値が，20 より大きくても，小さくても，かなりよい検出力をもっている。したがって，真の μ の値は，20 より大きいかもしれない，あるいは小さいかもしれないという場合には，両側検定を使うのがよい。

(2) 標本の大きさ n と検出力

(1)で述べた計算例において，$n = 16$, 25 とした場合の検出力を計算すると，表5のようになる。この結果を，$n = 9$ の場合のそれと比較するために，各検定ごとに，検出力関数のグラフを書くと図6，図7，図8である。

一部の例外を除き，標本の大きさ n を大きくしたほうが検出力がよい。例外の1つは，右片側検定において $\mu < 20.0$ の場合であるが，前述したように，右片側検定を使うということは，$\mu < 20.0$ ということはありえないとしているから，この場合は考慮する必要はない。もう1つの例外は，左片側検定において $\mu > 20.0$ の場合であるが，上と同じ理由により，この場合も考慮する必要はない。両側検定では検出力が 0.05〜1.0 の間に変化し，n の大きいほうが検出力は

表5 3つの検定の検出力 ($\sigma = 3.0,\ \mu_0 = 20.0$)

μ_1	$\gamma(\mu_1)$					
	右片側検定 (w_1)		左片側検定 (w_2)		両側検定 (w_3)	
	$n = 16$	$n = 25$	$n = 16$	$n = 25$	$n = 16$	$n = 25$
15.0	0.0000	0.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
16.0	0.0000	0.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
17.0	0.0000	0.0000	0.9906	0.9996	0.9793	0.9982
18.0	0.0000	0.0000	0.8461	0.9538	0.7611	0.9148
19.0	0.0014	0.0005	0.3745	0.5668	0.2643	0.3848
20.0	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
21.0	0.3745	0.5668	0.0014	0.0005	0.2643	0.3848
22.0	0.8461	0.9538	0.0000	0.0000	0.7611	0.9148
23.0	0.9906	0.9996	0.0000	0.0000	0.9793	0.9982
24.0	0.9999	0.9999	0.0000	0.0000	0.9999	0.9999
25.0	0.9999	0.9999	0.0000	0.0000	0.9999	0.9999

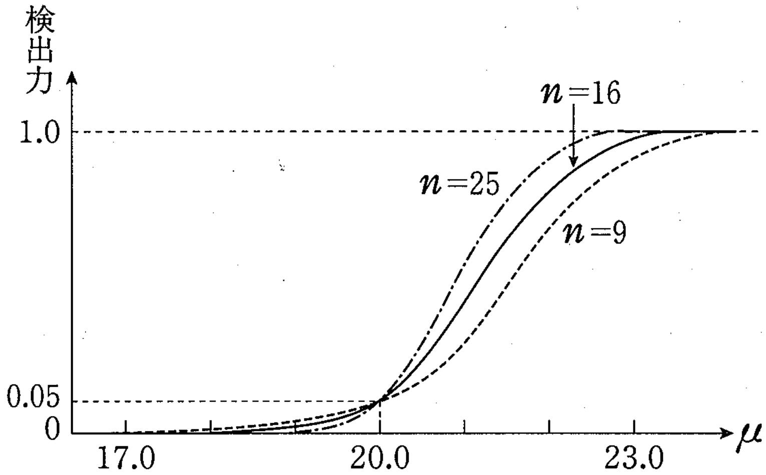


図6　右片側検定

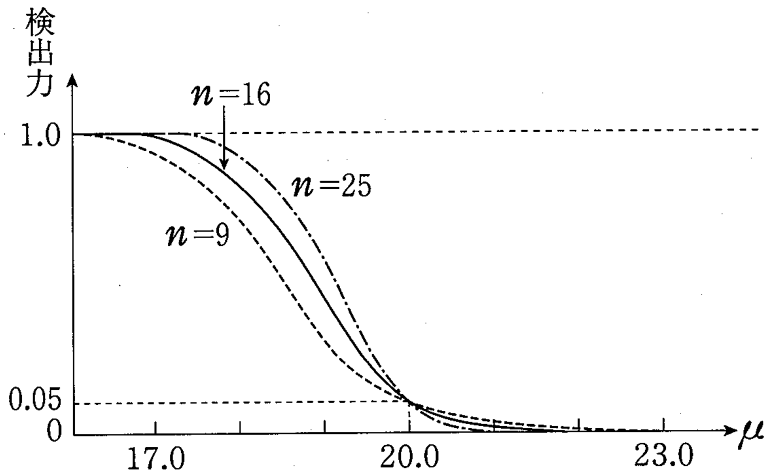


図7　左片側検定

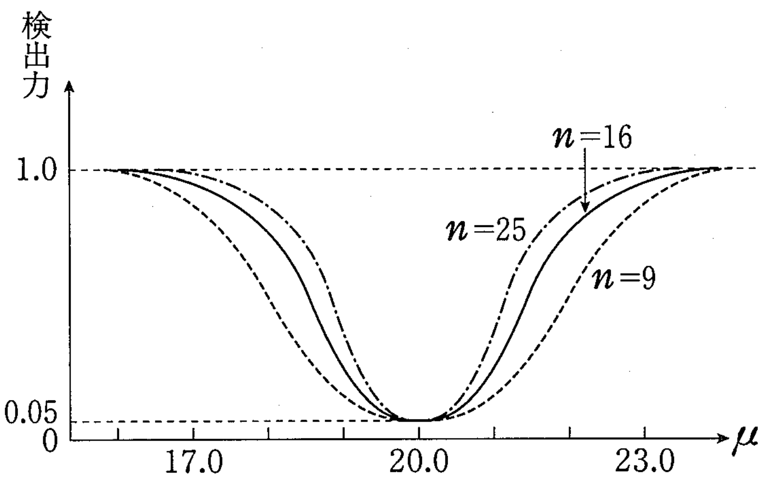


図8　両側検定

大きくなることが確認できる。

検定を計画した段階で，つまり実際に標本抽出を行って検定を行う前の段階で，検定の検出力は決まる。したがって，その段階で検出力を試算し，もしそれで不満足ならば，標本の大きさ n を増してやればよい。

例題3　正規分布 $N(\mu,\ 3.0^2)$ から大きさ $n=9$ の標本をとり，これをもとに，仮説 $H_0: \mu=25$ を，対立仮説 $H_1: \mu<25$ に対して，有意水準5％で検定しようとしている。検定方式としては，左片側検定

$$「\overline{X} < 25-1.65\frac{3.0}{\sqrt{9}} \text{ のとき，} H_0 \text{ を棄却する}」$$

を用いることにする，ここで $\overline{X}$ は標本平均である。

（i）　$\mu=23$ のとき，この検定の検出力はいくらか。

（ii）　$\mu=23$ のときの検出力0.90にするためには，標本の大きさ n はいくらにしなければならないか。

解　（i）　左片側検定の検出力 $\gamma(\mu_1)$ を与える(2)式に $\mu_0=25$, $\mu_1=23$, $\sigma=3.0$ を代入すると

$$\gamma(23)=\Phi\left(\frac{25-23}{3/\sqrt{9}}-1.65\right)=\Phi(2-1.65)=\Phi(0.35)$$

$$=0.5+I(0.35)=0.5+0.13683=0.63683\doteqdot 0.64$$

（ii）　$$\gamma(23)=\Phi\left(\frac{25-23}{3/\sqrt{n}}-1.65\right)=\Phi\left(-\frac{2}{3}\sqrt{n}-1.65\right)=0.90$$

$$\Phi\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}-1.65\right)=0.5+I\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}-1.65\right)=0.9$$

$$I\left(\frac{2}{3}\sqrt{n}-1.65\right)=0.4$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{n}-1.65=1.28$$

$$n=19.316$$

よって標本の大きさを20にすればよい。

4 ま と め

(1) 2種類の誤り

2種類の誤りは帰無仮説 H_0 に着目して，普通「第1種の誤りは帰無仮説 H_0 が真なのに，H_0 を棄却してしまう誤り」，「第2種の誤りは帰無仮説 H_0 が偽なのに，H_0 を採択してしまう誤り」と定義している。しかし第2種の誤りの確率 β を求めるためには，H_0 でない場合にどうなるかというもう1つの仮説 H_1 が必要となる。したがって対立仮説 H_1 の内容が明確でないと計算できない。そこで，$\beta = P(\{H_0$ を採択 $| H_1$ は真$\}) = P(\{H_1$ を棄却 $| H_1$ は真$\})$ によって求めねばならない。ゆえに「第2種の誤りは対立仮説 H_1 が真のとき，H_1 を棄却してしまう誤り」であると理解しておくことが大切である。式で表現すれば

$\alpha =$ 第1種の誤り $= P(\{H_0$ を棄却 $| H_0$ が真$\})$

$\beta =$ 第2種の誤り $= P(\{H_0$ を採択 $| H_0$ が偽$\}) = 1 - P(\{H_0$ を棄却 $| H_0$ が偽$\})$

$= P(\{H_0$ を採択 $| H_1$ が真$\}) = P(\{H_1$ を棄却 $| H_1$ が真$\})$

(2) 検 出 力

右片側対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$ に対する右片側検定は，$\mu > \mu_0$ の前提がくずれて $\mu < \mu_0$ であるときには，検定の精度が非常に悪くなる。つまり第2種の誤りの確率が非常に大きくなる。左側検定についても同様のことが言える。このことから，真の μ の値の存在範囲としてよほどの確信がもてない限り，片側検定は使わないほうがよい。ほとんどの場合，両側対立仮説に対する両側検定が用いられる。

標本の大きさ n と検出力の関係については，両側検定において検出力が0.05〜1.0の間を変化し，n の大きいほうが検出力が大きくなる。また片側検定において一部の例外を除き，n を大きくしたほうが検出力はよい。例外の場合は考慮する必要はない。

参考文献

1) 池田央編「統計ガイドブック」新曜社　1997年　p 80～p 81
2) 林知己夫編「統計学の基本」朝倉書店　1994年　p 112～p 117
3) 近藤良夫・安藤貞一編「統計的方法百問百答」日科技連　1976年　p 11～p 13，p 44～p 46，p 195～p 197
4) 森田優三・久次智雄共著「新統計概論　改訂版」日本評論社　1993年　p 275～p 291
5) 森棟公夫編「統計学入門」新世社　1993年　p 170～p 183
6) 永田靖著「統計的方法のしくみ」日科技連　1999年　p 79～p 81，p 83～p 91，p 105～p 111
7) 永田靖著「入門統計解析法」日科技連　1999年　p 49～p 57，p 63～p 68
8) 成實清松・坂井忠次共著「数理統計学要説　増訂版」培風館　昭和33年　p 121～p 125
9) 西山茂著「楽しい統計学セミナー」同文館　平成10年　p 85～p 89，p 91～p 96
10) 岡田泰栄著「平均値の統計」共立出版　1998年　p 101
11) 田河生長・斎藤斉・佐藤義隆・高遠節夫・玉木正一共著「確率統計」大日本図書　1998年　p 101～p 107
12) 田中勝人著「基礎コース統計学」新世社　2000年　p 190～p 198，p 213～p 216
13) 東京大学教養学部統計学教室編「統計学入門」東京大学出版会　1997年　p 233～p 239，p 251～p 252
14) 宇田川正友著「教師のための初等数学講座11　確率と統計」岩崎書店　昭和34年　p 149～p 156
15) 鷲尾泰俊著「推定と検定」共立出版　昭和53年　p 39～p 48，p 69～p 76