標準商品は複数存在するか*

宮　本　順　介

目　　次

1. は じ め に

価格方程式

$$\mathbf{p}=(1+r)\mathbf{pA}+w\mathbf{l} \tag{1}$$

を考える。ただし，$\mathbf{p}=(p_i)$　$i=1,\cdots n$：価格ベクトル，r：利潤率，$\mathbf{A}=(a_{ij})$ $i, j=1,\cdots n$：投入係数行列，$\mathbf{l}=(l_i)$　$i=1,\cdots n$：労働投入ベクトル，w：名目賃金率。(1)式の両辺に右から任意の半正ベクトル $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ を掛け，整理すると，

$$\frac{w}{\mathbf{p}(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}}=\frac{1}{\mathbf{lx}}\left(1-r\frac{1}{\dfrac{\mathbf{px}}{\mathbf{pAx}}-1}\right) \tag{2}$$

となる。(2)式は $\dfrac{w}{\mathbf{p}(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}}$ と r の関係，つまり $\mathbf{p}(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}$ を価値尺度に取った

*本稿は平成8年度松山大学特別研究助成金の成果である。

場合の実質賃金率 $\tilde{w} \equiv \dfrac{w}{\mathbf{p}(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}}$ と均等利潤率 r の関係を表している。つぎに，$\tilde{w}$ が r の一次関数となるための条件を考える。[1] (2)式から明らかなように，任意の r に対して

$$\frac{\mathbf{p}(r)\mathbf{x}}{\mathbf{p}(r)\mathbf{A}\mathbf{x}} = c \quad (c：定数) \tag{3}$$

が成立するならば，$\tilde{w}$ は r の一次関数となる。どのような価値尺度を選べば $\tilde{w}$ を r の一次関数として表すことができるのだろうか。

この問題に答えたのがピエロ・スラッファ[2] である。彼は，$\mathbf{A}$ の右フロベニウスベクトルで加重された国民所得を価値尺度に取れば，分配の方程式が

$$r = R(1-\tilde{w}) \tag{4}$$

となることを示した。ただし，R は極大利潤率である。スラッファの業績が独創的であるのは，ひとつには，$\mathbf{A}$ の右フロベニウスベクトル（スラッファはこれを標準商品と名付けた）を $\mathbf{x}$ に取れば $\dfrac{\mathbf{p}(r)\mathbf{x}}{\mathbf{p}(r)\mathbf{A}\mathbf{x}}$ が一定値を取るという，今日ではペロン＝フロベニウスの定理として知られている数学的命題を，おそらくその命題の存在を知ることなく，[3] 非数学的な独自の方法で証明した点にある。[4]

かくて問題は一応の解決をみたわけだが，$\dfrac{\mathbf{p}(r)\mathbf{x}}{\mathbf{p}(r)\mathbf{A}\mathbf{x}}$ が一定値をとり，分配の方程式が線形となるような合成商品は，スラッファの標準商品以外に存在しな

1）なぜ分配の方程式を一次関数の形で表現する必要があるのかについては，宮本 (1998) を参照。

2）Sraffa, P. (1960)

3）スラッファ『商品による商品の生産』の序文の謝辞には A. S. ビシコヴィッチ，フランク・ラムジー，アリスター・ワットソンの３人の数学者の名前が挙がっており，経済学者の名前は誰一人ない。スラッファは３人から「測りしれない数学的助力」を負っていると謝意を述べているので，彼らを通してペロン＝フロベニウスの定理の存在を知っていたのではないかという推測も成り立つが，明確なところは分からない。この点については，Kurz, H. D. and Salvadori, N. (2001), P. 264 を参照。

4）スラッファモデルの数学的な側面を簡潔，平易に説明したものとしては，例えば二階堂 (1976) を参照。

いのかどうかという問題は未解決のまま残された。この問題を最初に提起し，複数の標準商品が存在するための条件を提示したのは Miyao (1977) である。その後，Abraham-Frois and Berrebi (1978)，Sensat (1983)，d'Autume (1985)，Giorgi (1987)，Abraham-Frois and Berrebi (1987)，白杉剛(1989)，Abraham-Frois and Berrebi (1997) などの研究が続いた。以下ではこうした先行する諸研究を踏まえ，スラッファの標準商品と同じ役割をはたす合成商品が標準商品の他にも存在するのかどうかという問題を検討する。

2. 問　　題

問題は(3)式が成立するための条件である。そこで(3)式を

$$\mathbf{p}(r)(\mathbf{I}-c\mathbf{A})\mathbf{x}=0 \tag{5}$$

と書き変え，(5)式が成立するための条件をみていくことにする。

(5)式が成立のための第一の条件は

$$\mathbf{p}(r)(\mathbf{I}-c\mathbf{A})=0 \tag{6}$$

である。(6)式を変形すると，いわゆる資本の有機的構成均等条件を導き出すことができる。したがって資本の有機的構成が均等であれば，何を価値尺度財に取ろうと，(6)式が成立するので実質賃金率は必ず利潤率の一次関数となる。

第二の条件は

$$(\mathbf{I}-c\mathbf{A})\mathbf{x}=0 \tag{7}$$

である。この式に注目したのがスラッファである。なお，(6)式であれ(7)式であれ，これらを満たす半正ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ が定数倍を除いて一意に存在することはペロン＝フロベニウスの定理により保証されている。

(5)式を成立させる条件は(6)式と(7)式のほかにも存在するか，存在するとすればその条件の経済的意味は何か，これがここでの問題である。そこでまず(7)式を満足する $\mathbf{x}$ ，すなわち $\mathbf{A}$ の右フロベニウスベクトルを $\mathbf{x}^*$ とおき，つぎに

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*+t\mathbf{z} \quad t\in R,\ \mathbf{z}\in R^n \tag{8}$$

となる $\mathbf{x}$ を新たに定義する。そのように定義された $\mathbf{x}$ を $\dfrac{\mathbf{p}(r)\mathbf{x}}{\mathbf{p}(r)\mathbf{A}\mathbf{x}}$ に代入すると，

$$\frac{\mathbf{p}(r)\mathbf{x}^{*}+t\mathbf{p}(r)\mathbf{z}}{\mathbf{p}(r)\mathbf{A}\mathbf{x}^{*}+t\mathbf{p}(r)\mathbf{A}\mathbf{z}} \tag{9}$$

となる。ここで，$\mathbf{z}$ を任意に選ぶのではなく，$\mathbf{p}(r)\mathbf{z}=0$ かつ $\mathbf{p}(r)\mathbf{A}\mathbf{z}=0$ となる $\mathbf{z}$ を選ぶならば，(9)式は一定値 c を取り，(5)式が成立するので，(6)式と(7)式以外に(5)式を成立させる条件を見いだしたことになる。そこで問題は，ｉ）$\mathbf{p}(r)\mathbf{z}=0$ かつ $\mathbf{p}(r)\mathbf{A}\mathbf{z}=0$ となるような $\mathbf{z}$ が存在するかどうか，ii） 存在するとすればその条件は何か，またその経済的意味は何かということになる。

3．標準商品に替わりうる合成商品の存在

$\mathbf{p}(r)\mathbf{z}=0$ かつ $\mathbf{p}(r)\mathbf{A}\mathbf{z}=0$ となるような $\mathbf{z}$ が存在するならば，標準商品と同じ役割をはたす合成商品が標準商品以外にも存在することになる。では，そのような $\mathbf{z}\neq\mathbf{0}$ は存在するか。この問に答えたのが次の命題1である。

命題1　$\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{z}=0$[5] ならば，$\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{A}\mathbf{z}=0$。ただし，$\mathbf{z}\neq\mathbf{0}$，$r\in[0,\ R]$。

証明

$\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{z}=(1+r)\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{l}\mathbf{z}$ であるので，$\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{z}=0\Rightarrow\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{A}\mathbf{z}=0$ を証明する代わりに，$\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{z}=0\Rightarrow\mathbf{l}\mathbf{z}=0$ を証明する。

$\mathbf{M}(r)=[\mathbf{I}-(1+r)\mathbf{A}]$ は $r\in[0,\ R]$ で定義された微分可能な r の行列値関数であるので，$\mathbf{M}(r)^{-1}$ について k 階までの微分を求めると次のようになる。[6]

$$\frac{d\mathbf{M}(r)^{-1}}{dr}=\mathbf{M}(r)^{-2}\mathbf{A}$$

5) $\hat{\mathbf{p}}(r)\equiv\dfrac{\mathbf{p}(r)}{\mathbf{w}}$ と定義する。

6) 数学注1を参照。

$$\frac{d^2\mathbf{M}(r)^{-1}}{dr^2} = 2\mathbf{M}(r)^{-3}\mathbf{A}^2 \tag{10}$$[7]

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^k\mathbf{M}(r)^{-1}}{dr^k} = k!\mathbf{M}(r)^{-(k+1)}\mathbf{A}^k$$

つぎに(10)式を用いて，$\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{z} = \mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-1}\mathbf{z} = 0$ の k 階までの微分を求める。

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{z}}{dr} = \mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-2}\mathbf{A}\mathbf{z} = 0$$

$$\frac{d^2\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{z}}{dr^2} = 2\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-3}\mathbf{A}^2\mathbf{z} = 0 \tag{11}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^k\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{z}}{dr^k} = k!\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-(k+1)}\mathbf{A}^k\mathbf{z} = 0$$

$\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-2}\mathbf{A}\mathbf{z}$ は $\gamma\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-2}\mathbf{z} - \gamma\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-1}\mathbf{z}$ と書き直すことができるので，$\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-1}\mathbf{z} = 0$ および(11)より，$\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-2}\mathbf{z} = 0$。ただし $\gamma \equiv \frac{1}{1+r}$。また $\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-3}\mathbf{A}^2\mathbf{z}$ は $\gamma^2\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-3}\mathbf{z} - 2\gamma^2\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-2}\mathbf{z} - \gamma^2\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-1}\mathbf{z}$ と書き直すことができるので，$\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-1}\mathbf{z} = 0$，$\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-2}\mathbf{z} = 0$ および(11)より，$\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-3}\mathbf{z} = 0$。以下同様の計算を繰り返すことで，

$$\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-(k+1)}\mathbf{z} = 0 \quad i = 0, \cdots, n-1 \tag{12}$$

がえられる。

$\mathbf{B} \equiv \mathbf{M}(r)^{-1}$ と定義し，$\mathbf{B}$ の固有多項式を $f_{\mathbf{B}}(t) = |t\mathbf{I} - \mathbf{B}|$ とおくならば，Hamilton-Caley の定理[8] より $f_{\mathbf{B}}(t)$ は $\mathbf{B}$ のゼロ化多項式，すなわち

$$f_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) = b_0\mathbf{B}^n + b_1\mathbf{B}^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\mathbf{B} + b_n = \mathbf{0}$$

である。したがって，

---

7) 任意の自然数 n に対し，$\mathbf{A}^n$ が正則行列であるならば，$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ より，$(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n$ となる。これを $\mathbf{A}^{-n}$ で表し，$\mathbf{A}$ の $-n$ 乗という。

8) Hamilton-Caley の定理　正方行列 $\mathbf{A}$ の固有多項式を $f_{\mathbf{A}}(t) = |t\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ とすれば，$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ が成立する。すなわち，$f_{\mathbf{A}}(t)$ は $\mathbf{A}$ のゼロ化多項式である。

$$b_0\mathbf{B}^n = -(b_1\mathbf{B}^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\mathbf{B}+b_n)$$

両辺に左から $\mathbf{l}$，右から $\mathbf{z}$ を乗ずると

$$b_0\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-n}\mathbf{z} = -(b_1\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-(n-1)}\mathbf{z}+\cdots+b_{n-1}\mathbf{l}\mathbf{M}(r)^{-1}\mathbf{z}+b_n\mathbf{l}\mathbf{z}) \tag{13}$$

(12)式を代入すれば，$\mathbf{lz} = 0$。証明終わり

命題1より，一定の条件の下では標準商品以外にも分配の方程式を線形とする合成商品が存在することが証明された。

4. 存 在 条 件

命題1より，$\hat{\mathbf{p}}\mathbf{z} = 0$ となる $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ が存在するならば，スラッファの標準商品と同じ役割を果たす合成商品がスラッファの標準商品とは別に存在することをみた。では，$\hat{\mathbf{p}}\mathbf{z} = 0$ となる $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ は存在するのであろうか。ここで注意すべきことは，特定の r について $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{z} = 0$ となる $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ が存在するだけでは十分ではなく，任意の $r \in [0, R]$ について $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{z} = 0$ となる $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ が存在する必要があるということである。この点を考慮に入れるならば，異なる $r_i (i = 1\cdots n)$ を適当に選び，それらに対応する一次独立な n 個の価格ベクトル $\hat{\mathbf{p}}(r_1)$, $\hat{\mathbf{p}}(r_2)$, …, $\hat{\mathbf{p}}(r_n)$ を取り出し，それら全てについて $\hat{\mathbf{p}}(r_i)\mathbf{z} = 0\ (i = 1\cdots n)$ となる $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ が存在する必要がある。なぜなら，基底を形成する n 個の価格ベクトルについて $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{z} = 0$ となる $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ が存在するならば，任意の価格ベクトルはその一次結合として表すことができるので，任意の価格ベクトルについても $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{z} = 0$ が成立することになるからである。したがって問題は，同次連立1次方程式

$$\begin{aligned}
&p_1^1 z_1 + p_2^1 z_2 + \cdots + p_n^1 z_n = 0 \\
&p_1^2 z_1 + p_2^2 z_2 + \cdots + p_n^2 z_n = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&p_1^n z_1 + p_2^n z_2 + \cdots + p_n^n z_n = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

の解ベクトル $\mathbf{z}$ の構造を調べることに帰着する[9]。ただし，$p_i^j (i, j = 1\cdots n)$ は利潤率が r_i のときの第 j 財の価格である。

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \hat{p}_1^1 & \hat{p}_2^1 & \cdots & \hat{p}_n^1 \\ \hat{p}_1^2 & \hat{p}_2^2 & \cdots & \hat{p}_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{p}_1^n & \hat{p}_1^n & \cdots & \hat{p}_1^n \end{pmatrix}, \ \mathbf{z} = (z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_n)$$

とおけば，⒁式は

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{15}$$

と書くことができる。⒂が自明でない解 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ をもつためには，$\bar{\mathbf{P}}$ の階数がn以下，すなわち rank$\bar{\mathbf{P}}$ < n であることが必要十分である。例えば，rank$\bar{\mathbf{P}}$ = r, r ≤ n とすれば，$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{z} = \mathbf{0}$ の解集合はn-r 次元のベクトル空間になるので，n-r 個の $\mathbf{z}$ が存在することになる。よって，rank$\bar{\mathbf{P}}$ < n であるならば，スラッファの標準商品以外にもそれと同じ役割を果たす合成商品が存在することになる。そこで問題は rank$\bar{\mathbf{P}}$ < n の経済的意味は何かということになる。この問題に移る前に，⒂式が自明でない解を持つかどうかという問題を別の角度から検討することにする。

(1)式で表される価格ベクトルは，適当な変形を行うことで直接投入労働量と間接投入労働量の総和として表すことができる。すなわち，

$$\hat{\mathbf{p}}(r) = \mathbf{l} + (1+r)\mathbf{lA} + (1+r)^2\mathbf{lA}^2 + \cdots + (1+r)^n\mathbf{lA}^n + \cdots \tag{16}$$

ただし $\hat{\mathbf{p}}(r) \equiv \mathbf{p}/w$。⒃式は商品の価格（＝支配労働量）が直接投入労働投入量($\mathbf{l}$)と無限に遡る間接投入労働量($\mathbf{lA}^i$, $i = 1, 2, \cdots$)の総和として表されることを示している。[10)]

ここで，$\mathbf{A}$ の固有多項式を $f_{\mathbf{A}}(t) = |t\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ とおくならば，Hamilton-Caley の定理より，$f_{\mathbf{A}}(t)$ は $\mathbf{A}$ のゼロ化多項式，すなわち

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n = \mathbf{0}$$

である。したがって

$$\mathbf{A}^n = -\left(a_1'\mathbf{A}^{n-1} + a_2'\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + a_n'\right)$$

9）同次連立方程式の解空間については，例えば小山昭雄（1994）pp. 274-276 参照。
10）数学注 2 を参照。

が成立する。ただし，$a'_i(i=1, \cdots, n)$ は行列 $\mathbf{A}$ だけに依存する定数。したがって，

$$\mathbf{A}^n\mathbf{L} = -\left(a'_1\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{L}+a'_2\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{L}+\cdots+a'_n\mathbf{L}\right)$$

となるので，$\mathbf{A}^i\mathbf{L}(i=n+1,\ n+2\cdots)$ はすべて $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{L},\ \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{L},\ \cdots,\ \mathbf{AL}$ の線形結合として表される。

うえの結果を⒃式に代入し，整理すると

$$\hat{\mathbf{p}}(r) = \alpha_1(r)\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{L}+\cdots+\alpha_{n-1}(r)\mathbf{AL}+\alpha_n(r)\mathbf{L} \tag{17}$$

となる。ここで，n 次の正方行列 $\mathbf{K}=[\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{L},\ \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{L},\ \cdots,\ \mathbf{L}]$ を定義し，これを労働の階層行列 (labour profile matrix) と呼ぶことにする。労働の階層行列 $\mathbf{K}$ を使えば，⒄式は

$$\hat{\mathbf{p}}(r) = \boldsymbol{\alpha}(r)\mathbf{K} \quad \text{ただし}\ \boldsymbol{\alpha}(r) = (\alpha_1(r),\ \alpha_2(r),\ \cdots,\ \alpha_n(r))$$

と書ける。

同次連立1次方程式の解の集合は核と呼ばれ，$\mathrm{Ker}\mathbf{A}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{V}|\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\}$ と表される。価格ベクトルの核は $\mathrm{Ker}\hat{\mathbf{p}}=\{\mathbf{z}\in R^n|\hat{\mathbf{p}}\mathbf{z}=\mathbf{0}\}$，また労働の階層行列の核は $\mathrm{Ker}\mathbf{K}=\{\mathbf{z}\in R^n|\mathbf{Kz}=\mathbf{0}\}$ と表され，それらの間に次の命題が成立する。

命題2　$\mathrm{Ker}\mathbf{K}=\mathrm{Ker}\hat{\mathbf{p}}$

証明　まず $\mathrm{Ker}\hat{\mathbf{p}}\subset\mathrm{Ker}\mathbf{K}$ を証明する。命題1において，$\hat{\mathbf{p}}\mathbf{z}=0$ であれば $\mathbf{lz}=0$ および $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Az}=0$ が成立することをみた。そこで次は，$\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Az}=0$ の成立を前提に，命題1の証明と同様の計算を行うと

$$\mathbf{lAz}=0 \quad \text{for} \quad \forall\mathbf{Az}\in\mathrm{Ker}\hat{\mathbf{p}} \tag{18}$$

が得られる。以下 $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A}^i\mathbf{z}=0\,(i=2,\ 4,\ \cdots,\ n-1)$ の成立を出発点に，同じ操作を繰り返すと，

$$\mathbf{lA}^2\mathbf{z}=0,\ \mathbf{lA}^3\mathbf{z}=0,\ \cdots,\ \mathbf{lA}^{n-1}\mathbf{z}=0 \tag{19}$$

が得られる。したがって $\mathrm{Ker}\hat{\mathbf{p}}\subset\mathrm{Ker}\mathbf{K}$。つぎに $\mathrm{Ker}\mathbf{K}\subset\mathrm{Ker}\hat{\mathbf{p}}$ を証明する。$\mathbf{Kz}$

$= \mathbf{0}$ と仮定する。そのとき $\hat{\mathbf{p}}(r)\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{Kz} = 0$となるので，$\mathbf{z} \in \mathrm{Ker}\hat{\mathbf{p}}(r)$。したがって$\mathrm{Ker}\mathbf{K} \subset \mathrm{Ker}\hat{\mathbf{p}}$。かくて$\mathrm{Ker}\mathbf{K} = \mathrm{Ker}\hat{\mathbf{p}}$ が証明された。証明終わり

命題 2 より，$\hat{\mathbf{p}}\mathbf{z} = 0$ となる $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ が存在するかどうかは，同次連立一次方程式

$$\mathbf{Kz} = \mathbf{0} \tag{20}$$

が自明でない解を持つかどうかを問うことにほかならないということが分かった。⑵⓪式が自明でない解を持つためには，$\mathbf{K}$ の階数が n 以下であることが必要十分である。$\mathrm{rank}\mathbf{K} = \mathrm{r}$，$\mathrm{r} \leq \mathrm{n}$ とすれば，$\mathbf{Kz} = \mathbf{0}$ の解集合は n-r 次元のベクトル空間になるので， n-r 個の $\mathbf{z}$ が存在する。以上が，労働の階層行列の視点から見た，$\hat{\mathbf{p}}\mathbf{z} = 0$ となる $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ が存在するための条件である。

5. 経済的意味

スラッファの標準商品以外にもそれと同じ役割を果たす合成商品が存在するかどうかは，価格行列 $\bar{\mathbf{P}}$ の階数または労働の階層行列 $\mathbf{K}$ の階数に依存していることが分かった。まとめると，ｉ）価格行列 $\bar{\mathbf{P}}$，労働の階層行列 $\mathbf{K}$ の階数がそれぞれ n の場合，⒂式および⑵⓪式は自明な解 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ をもつ。この場合にはスラッファの標準商品に代わりうる合成商品は存在しない。ii）価格行列 $\bar{\mathbf{P}}$，労働の階層行列 $\mathbf{K}$ の階数が 1 の場合。⒂式および⑵⓪式は $n-1$ 個の自明でない解 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ をもつ。この場合にはスラッファの標準商品と同じ役割を果たす合成商品が $n-1$ 個存在するので，スラッファの標準商品と合わせて，全体として n 個の合成商品が存在することになる。そしてそれらは一次独立であり，基底を形成するので，この場合には n 次元ベクトル空間のすべてのベクトルが標準商品の役割を果たすことになる。これは資本の有機的構成均等の場合に相当する。iii）価格行列 $\bar{\mathbf{P}}$ および労働の階層行列 $\mathbf{K}$ の階数が p であり，$1 < p < n$ の場合。標準商品と同じ役割を果たす合成商品が $n-p+1$ 個存在する。

価格行列 $\bar{\mathbf{P}}$ および労働の階層行列 $\mathbf{K}$ の階数が n より小でなければ，標準商

品以外にそれと同じ役割を果たす合成商品は存在しない。このことの経済的意味を考えよう。いま価格行列 $\bar{\mathbf{P}}$ の階数が n より小であり，例えば $\mathrm{rank}\bar{\mathbf{P}} = p$, $1 < p < n$ とする。この時には, n 個の商品のうち $n-p$ 個の商品の価格が p 個の商品の価格の一次結合として表されることになる。これは, p 個の商品の価格さえ分かれば，残り $n-p$ 個の商品の価格は分かるということを意味しているが，このようなことは通常あり得ない。同じことを労働の階層行列について見てみよう。労働の階層行列 $\mathbf{K}$ の階数が n より小であり，例えば $\mathrm{rank}\mathbf{K} = p$, $1 < p < n$ とする。この時には， $n-p$ 個の産業における労働の階層ベクトルが p 個の産業の労働の階層ベクトルの一次結合として表されることになる。これは， $n-p$ 個の産業の技術が残り p 個の産業の技術を決めているということであり，特殊な技術が想定されていることを意味する。[11] こうした技術条件の特殊性を反映して， $n-p$ 個の商品の価格が p 個の商品の価格に依存するという価格行列における奇妙な結果が引き出されたのだということができる。

6. む　す　び

これまでの結果をまとめると次のようになる。ｉ）標準商品以外にも分配の基本方程式 $r = R(1-\bar{w})$ を成立させる合成商品は存在する，ⅱ）しかしそのような合成商品を構成するためには，生産技術が部門間で独立しているという想定を崩す必要がある。こうした結果から得られる含意は，ｉ）生産技術に制約を課してまで，第２，第３の標準商品を求めることに積極的意義を認めることはできない，ⅱ）生産技術に制約を課すことなく構成できる合成商品はスラッファの標準商品だけであり，その意味では，スラッファの標準商品は最も一般的な不変の価値尺度[12] であるということになる。　　(2001年4月20日)

11) Schefold (1976) は，労働の階層行列の階数が $\mathrm{rank}\mathbf{K} < n$ である経済を変則的 (irregular) な体系，$\mathrm{rank}\mathbf{K} = n$ である経済を正常的 (regular) な体系と呼び区別し，われわれは正常的体系を仮定すべきであり，その場合にはスラッファの標準商品だけしか存在しない，と主張する。

12) 不変の価値尺度の意味については宮本（1998）参照。

参考文献

Abraham-Frois, G. and Berrebi, E. (1976), *Theory of Value, Prices and Accumulation*, Cambridge University Press

Abraham-Frois, G. and Berrebi, E. (1978), "Pluralitê des marchandises êtalons: existence et construction", *Revue d'Êonomie Politique*, Vol. 88, No. 5, pp. 688-712.

Abraham-Frois, G. and Berrebi, E. (1987), *Prix, Profits et Rythmes d'Accumulation*, ECONOMICA

Abraham-Frois, G. and Berrebi, E. (1997), *Prices, profits and rhythms of accumulation*, Cambridge University Press

d'Autume, A. (1985), "Prix, taux de profit et etalons", *Revue d'Êonomie Politique*, Vol. 95, No. 1, pp. 27-50.

Giorgi, G. (1987), "On the Linearity of the Distribution Function and the Fundamental Marxian Theorem in Simple Sraffa's Models", *Economic Notes*, No. 2, pp. 48-59.

Kurz, H. D. and Salvadori, N. (2001), "Sraffa and the mathematicians Frank Ramsey and Alister Watson", in Cozzi, T. and R. Marchionatti ed. (2001), *Piero Sraffa's Political Economy : A centenary estimate*, Routledge

Miyao, T. (1977), "A Generalization of Sraffa's Standard Commodity and Its Complete Characterization", *International Economic Review*, Vol. 18, No. 1, pp. 151-162

Schefold, B. (1976), "Relative Prices as a Function of the Rate of Profit: A Mathematical Note" *Journal of Economics (Zeitschrift für Natianlöknomie)*, Vol. 36, pp. 21-48.

Sensat, J. O. (1983), "Sraffa and Ricardo on Value and Distribution", *The Philosophical Forum*, Vol. 14, No. 3-4, Spring-Summer, pp. 334-368.

Sraffa, P. (1960), *Production of Commodities by Means of Commodities : Prelude to a Critique of Economic Theory*, Cambridge U. P. (菱山泉・山下博訳『商品による商品の生産—経済理論批判序説—』有斐閣　昭和 37 年)

小山昭雄（1994）『経済数学教室 1 線型代数の基礎（上）』岩波書店

白杉剛（1989）「不変の価値尺度と標準商品」『甲南経済学論集』第 30 巻　第 4 号 (第 170 号)

宮本順介（1998),「標準商品とリカードの不変の価値尺度問題」『熊本学園大学経済論集』第 5 巻第 1・2 合併号

二階堂副包（1976),「経済現象と固有値」『数学セミナー1976 年 4 月』(『数学セミナーリーディングス線形代数ア・ラ・カルト』日本評論社, 1990 年, 所収)

数　学　注

1. $\mathbf{M}(r)^j\cdot(\mathbf{M}(r)^j)^{-1}=\mathbf{I}$ の両辺を r で微分すると

$$\frac{d\mathbf{M}(r)^j}{dr}(\mathbf{M}(r)^j)^{-1}+\mathbf{M}(r)^j\frac{d(\mathbf{M}(r)^j)^{-1}}{dr}=\mathbf{0}$$

$$\frac{d(\mathbf{M}(r)^j)^{-1}}{dr}=-(\mathbf{M}(r)^j)^{-1}\frac{d\mathbf{M}(r)^{j1}}{dr}(\mathbf{M}(r)^j)^{-1}. \tag{1}$$

つぎに，$\mathbf{M}(r)^j$ を r で微分すると

$$\frac{d\mathbf{M}(r)^j}{dr}=\frac{d\mathbf{M}(r)}{dr}\mathbf{M}(r)^{j-1}+\mathbf{M}(r)\frac{d\mathbf{M}(r)}{dr}\mathbf{M}(r)^{j-2}+\cdots+\mathbf{M}(r)^{j-1}\frac{d\mathbf{M}(r)}{dr}$$

また $\dfrac{d\mathbf{M}(r)}{dr}=-\mathbf{A}$ であるので，上式は

$$\frac{d\mathbf{M}(r)^j}{dr}=-\mathbf{A}\mathbf{M}(r)^{j-1}+\mathbf{M}(r)(-\mathbf{A})\mathbf{M}(r)^{j-2}+\cdots+\mathbf{M}(r)^{j-1}(-\mathbf{A}) \tag{2}$$

となる。(2)式を(1)式に代入し，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{M}(r)^{-1}$ が可換，すなわち $\mathbf{A}\mathbf{M}(r)^{-1}=\mathbf{M}(r)^{-1}\mathbf{A}$ であること[1] に留意して整理すると，

$$\frac{d(\mathbf{M}(r)^j)^{-1}}{dr}=j(\mathbf{M}(r)^{j+1})^{-1}\mathbf{A} \tag{3}$$

(3)を使って，$\dfrac{d^j\mathbf{M}(r)^{-1}}{dr^j}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ を順次計算するならば，

$$\frac{d\mathbf{M}(r)^{-1}}{dr}=\mathbf{M}(r)^{-2}\mathbf{A}$$

$$\frac{d^2\mathbf{M}(r)^{-1}}{dr^2}=2\mathbf{M}(r)^{-3}\mathbf{A}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^k\mathbf{M}(r)^{-1}}{dr^k}=k!\mathbf{M}(r)^{-(k+1)}\mathbf{A}^k$$

2. $\mathbf{p}=(1+r)\mathbf{pA}+w\mathbf{l}$ (4)

(4)式の両辺に $1+r$ と $\mathbf{A}$ を順次掛け，辺々加えあわせると

---

1) $\mathbf{A}\mathbf{M}(r)^{-1}=\mathbf{A}[I-(1+r)\mathbf{A}]^{-1}$
$=\mathbf{A}[I+(1+r)\mathbf{A}+(1+r)^2\mathbf{A}^2+\cdots+(1+r)^n\mathbf{A}^n+\cdots]$
$=[I+(1+r)\mathbf{A}+(1+r)^2\mathbf{A}^2+\cdots+(1+r)^n\mathbf{A}^n+\cdots]\mathbf{A}$
$=[\mathbf{I}-(\mathbf{l}+r)\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{A}$
$=\mathbf{M}(r)^{-1}\mathbf{A}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \cancel{(1+r)}\mathbf{pA} + w\mathbf{l} \\
\cancel{(1+r)\mathbf{pA}} &= \cancel{(1+r)^2\mathbf{pA}^2} + (1+r)w\mathbf{lA} \\
\cancel{(1+r)^2\mathbf{pA}^2} &= \cancel{(1+r)^3\mathbf{pA}^3} + (1+r)^2 w\mathbf{lA}^2 \\
&\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\cancel{(1+r)^n\mathbf{pA}^n} &= \cancel{(1+r)^{n+1}\mathbf{pA}^{n+1}} + (1+r)^n w\mathbf{lA}^n \\
&\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\hline
\mathbf{p} &= w\mathbf{l} + (1+r)w\mathbf{lA} + (1+r)^2 w\mathbf{lA}^2 + \cdots + (1+r)^n w\mathbf{lA}^n + \cdots
\end{aligned}
$$

となる。