行列の階数（ランク）の求め方に関する一考察

石　川　忠　孝

1　はじめに

行列のランクを学習するとき，一次結合（線形結合），一次独立（線形独立），一次従属（線形従属），ベクトル空間，部分空間，基底，像，核などと耳慣れない，いくつかの用語が定義され，使用されているから難しい。しかし，避けて通ることはできない。後々，しばしば使われるこれらの用語に，早く慣れてしまうことが，線形代数を修める近道である。

また，行列のランクの定義は，基本的なものは行列式によるものと，ベクトルの一次独立によるものである。しかし，それ以外にいろいろの定義があり，混乱を起こしがちである。そこで，これらの定義を取り挙げて，例題の行列のランクを計算することを通して，行列のランクの求め方を考察する。

2　行列のランクの定義とその求め方

行列のランクのいろいろな定義に基づいて，次の例題の行列のランクを計算して比較検討する。

例題　次の行列のランクを求めよ。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

定義１　行列の r 次の小行列式の中には０でないものがあり，$(r+1)$ 次以上の小行列式はすべて０であるとき，行列のランクは r である。

この定義は行列式の次数しか使わないからわかりやすいが，行や列の個数が多くなると計算が大変である。

解　3次の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 9 \\ 11 & 12 & 14 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 10 \\ 11 & 12 & 15 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \\ 11 & 13 & 14 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 10 \\ 11 & 14 & 15 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \\ 12 & 13 & 14 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 10 \\ 12 & 13 & 15 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 10 \\ 12 & 14 & 15 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 10 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$$

の10個で，値はすべて0になる。

2次の小行列式で，値が0でないものがあるから（例えば $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -5$）$\mathrm{rank}\, A = 2$ となる。

この行列では，2つの行の選び方は ${}_3C_2 = 3$ 通り，2つの列の選び方は ${}_5C_2 = 10$ 通りあるから，2次の小行列式は $3 \times 10 = 30$ 個できて，どれも値が0にならないが，ランクが2以上であることを主張するには，値が0でないものが1つあることを示せばよい。

小行列式を用いた定義をランクの計算に用いようとすると，すべての $(r+1)$ 次の小行列式について値が0であることを示さなければならず，実用的でなく一般にめんどうである。しかし，この定義には，ランクの持っているいくつかの性質を，比較的簡単に与えるという利点がある。例えば正方行列に関するものである。n 次正方行列 A で，ランクが n であることは $|A| \neq 0$ と同じことになる。すなわち，A は正則行列である。また転置行列に関するものである。行列式は「与えられた行列に対する行列式の値と，その転置行列に対する行列式の値は等しい」という性質を持っている。したがって，転置行列のすべての小行列式の値は，もとの行列のものと同じであることになる。これは，小行列式を用いたランクの定義によれば，A と ${}^tA$ のランクは等しいことを意味する。その結果，列ベクトルを用いたランクの定義は，行ベクトルについても同じよう

に言えることがわかる。

定義 2　行列を列ベクトルの並びとみなしたとき，一次独立な列ベクトルの最大個数がランクである。

$m\times n$ 行列 A を列ベクトルによって，$A=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_n)$ で表す。一次独立な列ベクトルの最大個数を r とすると，これからできる r 次の小行列式の中には 0 でないものが少なくとも 1 つあり，$(r+1)$ 次以上の小行列式はすべて 0 であるから，定義 1 より $\operatorname{rank} A=r$

解　A の列ベクトルは

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\6\\11\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\7\\12\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}3\\8\\13\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}4\\9\\14\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_5=\begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}$$

である。n 次のベクトルを $n+1$ 個とれば，それらは一次従属であるから，まず $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立かを調べる。

$$h\boldsymbol{a}_1+k\boldsymbol{a}_2+l\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}\cdots\cdots①$$

とする。

$$h\begin{pmatrix}1\\6\\11\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\7\\12\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}3\\8\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}h+\ 2k+\ 3l\\6h+\ 7k+\ 8l\\11h+12k+13l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{cases}h+\ 2k+\ 3l=0 & ①\\6h+\ 7k+\ 8l=0 & ②\\11h+12k+13l=0 & ③\end{cases}$$

係数の行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -10 \\ 11 & -10 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{vmatrix} = 0$$

であるから，クラメルの公式を使えない。

①，②より h を消去すると

$$k = -2l$$

これを①に代入すると $h = l$

$h = l$，$k = -2l$ は③を満たす。

したがって，$h = l = 1$，$k = -2$ はこの連立方程式の1つの解で，$\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を成立させるから，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次従属である。$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の組から $\boldsymbol{a}_3$ を除いて，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ の組を考えると，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ は成分が比例してないから一次独立である。したがって，5つの列ベクトルの組の中に一次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ があり，これに $\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{a}_5$ をつけ足すと一次従属になる。

ゆえに $\mathrm{rank}\, A = 2$

先に列ベクトルを用いたランクの定義は，行ベクトルについても同じように言えることがわかった。そこで次の定義3が言える。

定義3　行列を行ベクトルの並びとみなしたとき，一次独立な行ベクトルの最大個数はランクである。

$m \times n$ 行列 A を行ベクトルによって，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}$ と表す。一次独立な行ベクトルの最大個数を r とすると，これからできる r 次の小行列式の中には少なくとも1つは0でないものがあり，$(r+1)$ 次以上の小行列式はすべて0であるから，定義1より $\mathrm{rank}\, A = r$

なお，行列のランクは，$\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, {}^t\!A$ であることが知られているから，これを使用してもよい。

解　A の行ベクトルは

$$\boldsymbol{b}_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),\ \boldsymbol{b}_2 = (6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10),\ \boldsymbol{b}_3 = (11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15)$$

である。

$$h\boldsymbol{b}_1 + k\boldsymbol{b}_2 + l\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$$

とする。

$$h(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)+k(6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10)+l(11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15)$$
$$= (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$
$$(h+6k+11l,\ 2h+7k+12l,\ 3h+8k+13l,\ 4h+9k+14l,$$
$$5h+10k+15l) = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$\begin{cases} h+\ 6k+11l = 0 & ① \\ 2h+\ 7k+12l = 0 & ② \\ 3h+\ 8k+13l = 0 & ③ \\ 4h+\ 9k+14l = 0 & ④ \\ 5h+10k+15l = 0 & ⑤ \end{cases}$$

①，②から $h = l,\ k = -2l$

これらは③，④，⑤をみたす。

したがって，$h = l = 1,\ k = -2$ はこの連立方程式の１つの解で，$\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を成立させるから，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次従属である。$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の組から $\boldsymbol{a}_3$ を除いて $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ の組を考えると，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ は成分が比例してないから一次独立である。

ゆえに，$\mathrm{rank}\ A = 2$

定義２，定義３では，取り扱う列ベクトルまたは行ベクトルが一次独立か一次従属かを判定している。実際に判定するのは易しいことではなく，上記のようにめんどうである。一次独立，一次従属という言葉は何となく親しみにくいこともあってか，一次独立，一次従属のあたりから，ついていけなくなると告白する学生が多い。一次独立，一次従属ということの十分な理解を図ることが大切である。

たとえば，３個の３次元数ベクトル

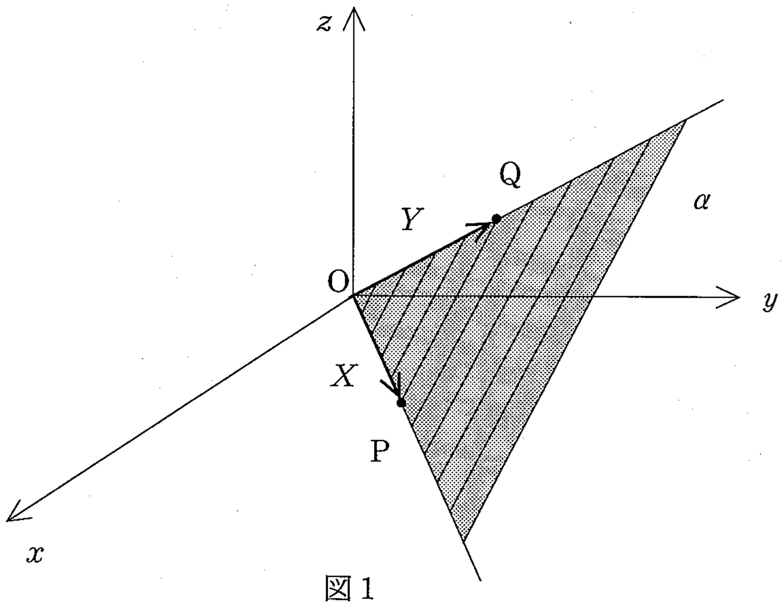

図1

$$\boldsymbol{X} = (0,\ 1,\ 3),\ \ \boldsymbol{Y} = (1,\ 0,\ -1),\ \ \boldsymbol{Z} = (-3,\ 2,\ 7)$$

は，$\boldsymbol{Z} = 2\boldsymbol{X} - 3\boldsymbol{Y}$

ゆえに，一次従属である。

一方，次の3個の3次元数ベクトルは一次独立である。

$$\boldsymbol{X} = (1,\ 1,\ 0),\ \ \boldsymbol{Y} = (0,\ 1,\ 1),\ \ \boldsymbol{Z} = (1,\ 0,\ 1)$$

なぜなら，点R(1, 0, 1)は，原点Oと点P(1, 1, 0)と点Q(0, 1, 1)を通る平面αに含まれないので，$\boldsymbol{Z}$は$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$の一次結合で書けない。同様に，$\boldsymbol{X}$は$\boldsymbol{Y}$と$\boldsymbol{Z}$の一次結合で書けないし，$\boldsymbol{Y}$は$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Z}$の一次結合で書けない。それぞれ$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Z}$は一次独立である。

この例でわかるように，幾つかのベクトルが一次独立とは，言葉どおり，これらのベクトルがそれぞれ，独立な方向に向いていることである。

直観的には，そういうことだが，一次独立か一次従属かを実際に判定するのは，易しいことではない。次の2つの定理を利用すれば幾分易しくなる場合がある。

定理1　n個のn次元数ベクトル$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$が一次従属であるための必要十分条件は

$$|\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_n| = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

となることである。

定理 2　n 個の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は

$$|\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_n| \neq 0$$

となることである。

定義 2 による解法の別解

A の列ベクトルは

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

である。n 次のベクトルを $n+1$ 個とれば，それらは一次従属であるから，まず $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立かを調べる。

$$|\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -10 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

よって，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次従属である。$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の組から $\boldsymbol{a}_3$ を除いて，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ の組を考えると，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ は成分が比例してないから一次独立である。したがって，5 つの列ベクトルの組の中に一次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ があり，これに $\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{a}_5$ をつけ足すと一次従属になる。

ゆえに，$\mathrm{rank}\,A = 2$

定義 4　行列にガウスの消去法を適用し，前進消去を終了した段階で得られる行列について，少なくとも 1 つは 0 でない要素がある行の個数がランクである。

行列にガウスの消去法を適用し，前進消去を終了した段階で得られる行列に

ついて，少なくとも1つは0でない要素がある行の個数を r とすると，r 次の小行列式の中に0でないものがあり，$(r+1)$ 次以上の小行列式は（もしあれば），要素がすべて0の行を少なくとも1つ含むから，値が0である。定義1より，$\mathrm{rank}\, A = r$

解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-11r_1]{r_2-6r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank}\, A = 2$

ともかく素直にガウスの消去法を適用すればよく，行列のランクが簡単に求められる。また，ガウスの消去法は連立一次方程式を解くために大切な解法であるから，必ず習熟しておかねばならない。

定義5　行列の標準形 $A^* = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ は1つだけ定まるから，r も1つ定まる。この r を行列 A のランクという。

$|E_r| = 1$, $(r+1)$ 次以上の小行列式を作ると，要素がすべて0の行を少なくとも1つ含むから，その値は0である。よって $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, A^* = r$

解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-11r_1]{r_2-6r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\times\left(-\frac{1}{5}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{c_4+2c_1\\ c_5+3c_1}]{c_3+c_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_5-4c_2]{\substack{c_3-2c_2\\ c_y-3c_2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}E_2 & O\\ O & O\end{bmatrix}$$ よって，$\mathrm{rank}\ A=2$

標準形を導く方法はやっかいなようで，原理はいたって簡単だから，コンピュータにも向き応用が広い。理論上も捨てがたいよさがある。初心者向きであるのも強味である。また，標準形ならば，ランクはひと目でわかる。

定義6　行列の列ベクトルの張る空間の次元が行列のランクである。

$m\times n$ 行列 A を列ベクトルによって，$A=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{a}_n)$ と表す。これらのベクトルの張る $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 $W=[\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{a}_n]$ の次元が r のとき，$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{a}_r$ は一次独立(簡単のため，はじめの r 個が一次独立とする)。よって，一次独立な列ベクトルの最大個数は r だから，定義2より

$\mathrm{rank}\ A=dim\ W=r$

解　A の列ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{a}_5$ とすると

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\6\\11\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\7\\12\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}3\\8\\13\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}4\\9\\14\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_5=\begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{a}_5$ で張られる $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間を W とする。

$\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0}$だから $\boldsymbol{a}_1$ は一次独立，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ は成分が比例してないから $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ は一次独立である。

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 7 & 8\\ 11 & 12 & 13\end{vmatrix}\ \underset{r_3-11r_1}{\overset{r_2-6r_1}{=\!=\!=}}\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & -10\\ 0 & -10 & -20\end{vmatrix}=0$$ より $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次従属だから $\boldsymbol{a}_3$ を除く。同様にして $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_4$ は一次従属だから $\boldsymbol{a}_4$ を除く。$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_5$ は一次従属だから $\boldsymbol{a}_5$ は除く。ところで $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ は一次独立だから $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ は

W の基底の1つであって $\dim W = 2$

ゆえに $\mathrm{rank}\, A = 2$

定義7　行列の行ベクトルの張る空間の次元が行列のランクである。

$m \times n$ 行列 A を行ベクトルによって，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}$ と表す。これらのベクトルの張るベクトル空間 $W = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots\ldots, \boldsymbol{b}_m]$ の次元が r のとき，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ は一次独立(簡単のため，はじめの r 個が一次独立とする)。よって，一次独立な行ベクトルの最大個数は r だから，定義3より，$\mathrm{rank}\, A = \dim W = r$

解　A の行ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ とすると

$$\boldsymbol{b}_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),\ \boldsymbol{b}_2 = (6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10),\ \boldsymbol{b}_3 = (11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15)$$

$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ で張られる $\boldsymbol{R}^5$ の部分空間を W とする。

$\boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{b}_1$ は一次独立，$\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ は成分が比例してないから，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ は一次独立である。

$h\boldsymbol{b}_1 + k\boldsymbol{b}_2 + l\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$ とおくと

$$(h+6k+11l,\ 2h+7k+12l,\ 3h+8k+13l,\ 4h+9k+14l,$$
$$5h+10k+15l) = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

よって

$$\begin{cases} h+\ 6k+11l = 0 & ① \\ 2h+\ 7k+12l = 0 & ② \\ 3h+\ 8k+13l = 0 & ③ \\ 4h+\ 9k+14l = 0 & ④ \\ 5h+10k+15l = 0 & ⑤ \end{cases}$$

①，②から $h = l$，$k = -2l$　これは③，④，⑤をみたす。

よって，$h = l = 1$，$k = -2$ はこの連立方程式の1つの解である。

$$\therefore \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$$

したがって，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ は一次従属だから $\boldsymbol{b}_3$ を除く。ところで $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ は一

次独立だから，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ は W の基底の 1 つであって，$\dim W = 2$

ゆえに，$\mathrm{rank}\, A = 2$

定義 8　行列の表す一次写像による像空間の次元を行列のランクという。

$m \times n$ 行列 A を列ベクトルによって，$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots\ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と表す。

$\boldsymbol{R}^n$ の任意のベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とすると

$$F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots\ldots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots\cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

この $F(\boldsymbol{x})$ 全体が像 ImF であり，係数 x_1, x_2, ……, x_n はいずれも任意の実数値をとるから，ImF は $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，……，$\boldsymbol{a}_n$ の張る空間である。すなわち，$ImF = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots\ldots, \boldsymbol{a}_n]$ したがって，定義 6 より，$\mathrm{rank}\, A = \dim(ImF)$

解　A の列ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{a}_5$ とすると

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} \overset{r_2 - 6r_1}{\underset{r_3 - 11r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -10 & -20 \end{vmatrix} = 0$$ だから，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次従属である。

$h\boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2 + l\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ とおくと

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} h + 2k + 3l = 0 \\ 6h + 7k + 8l = 0 \\ 11h + 12k + 13l = 0 \end{cases}$$

これを解くと $h = l$，$k = -2l$

したがって，$h=l=1$，$k=-2$ はこの連立方程式の1つの解であるから

$$\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0} \qquad \therefore \boldsymbol{a}_3=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1$$

同様にして，$\boldsymbol{a}_4=-2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_5=3\boldsymbol{a}_1-4\boldsymbol{a}_2$

ところで，像 ImF は $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，……，$\boldsymbol{a}_5$ の張る空間であるから

$ImF=[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5]=[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ である。しかも $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ は一次独立だから

$$\dim(ImF)=2$$

ところで $\dim(ImF)=\mathrm{rank}\,A$ だから

$$\therefore \mathrm{rank}\,A=2$$

別解

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 \\ 6x_1+7x_2+8x_3+9x_4+10x_5 \\ 11x_1+12x_2+13x_3+14x_4+15x_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X=x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 \\ Y=6x_1+7x_2+8x_3+9x_4+10x_5 \\ Z=11x_1+12x_2+13x_3+14x_4+15x_5 \end{cases}$$

よって，$2Y-X=Z \qquad \therefore X-2Y+Z=0$

したがって

$$ImF=\left\{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \middle| X-2Y+Z=0\right\}$$

つまり，ImF は $\boldsymbol{R}^3$ を3次元空間とみなしたとき，$X-2Y+Z=0$ で与えられる $\boldsymbol{R}^3$ の平面と一致する。平面は2次元であるから

$$\dim(ImF)=2$$

ところで $\dim(ImF)=\mathrm{rank}\,A$ だから

$$\therefore \mathrm{rank}\,A=2$$

以上のように，定義はいろいろあっても結局は一致する。

3 まとめ

行列のランクの定義にはいろいろなやり方がある。線形代数のさまざまな場面で登場する概念だからである。どの定義でも結局は同じであり，必要に応じて単に言い換えたものに過ぎない。テキストによく見かける定義は，行列式を用いたもの（定義１）とベクトルの一次独立によるもの（定義２，３）である。しかし，行基本操作によるもの，すなわち行列にガウスの消去法を適用し，前進消去を行ってランクを求めるもの（定義４）が最も簡単で計算しやすい。ともかく素直にガウスの消去法を適用すればよいのである。正に実用向きである。ある定義のものに出会ったとき，別の定義のものに置き換えると何が言えるかを検討してみることが，ランクに慣れるためにも，また理解を深めるためにも大切なことである。

参考文献

1) 安藤四郎著「これだけは知っておこう線形代数」現代数学社　1993年　p 99～p 109.
2) 有馬哲・石村貞夫共著「よくわかる線形代数」東京図書　1993年　p 28～p 33，p 124～p 168
3) 石谷茂著「行列」現代数学社　1980年　p 137～p 159
4) 石谷茂著「ベクトル」現代数学社　1980年　p 99～p 130
5) 石谷茂著「Dim と Rank に泣く」現代数学社　昭和56年　p 55～p 125
6) 笠原晧司著「線形代数学」サイエンス社　1997年　p 24～p 27，p 76～p 96
7) 中谷太郎編・小寺平治著「線形代数序説」共立出版　1978年　p 69～p 110
8) 宮本敏雄著「線形代数入門」東京図書　1973年　p 233～p 248
9) 難波誠著「線形代数12章」日本評論社　1995年　p 45～p 50，p 70～p 72
10) 佐武一郎著「線形代数学」裳華房　1998年　p 103～p 108
11) 薩摩順吉，四ツ谷晶二共著「キーポイント線形代数」岩波書店　1993年　p 81～p 95
12) 立花俊一・成田清正共著「エクササイズ線形代数」共立出版　1998年　p 95～p 101
13) 矢ケ部巌著「代数」共立出版　1981年　p 29～p 156