逆行列の公式の導出と逆行列の計算に関する一考察

石　川　忠　孝

1　は じ め に

高等学校では，数学Cで２次の正方行列を取り扱い，２次の正方行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は $ad \neq bc$ のとき，逆行列 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ をもつことを学んでいる。しかし，文系ではほとんど履修してないだろうという配慮もあってか，共通教育の社会科学系向きのテキストにおいては，２次の正方行列の逆行列の公式を証明抜きでズバリ与えて，それを利用しているものがある。また，２次の正方行列の公式は導いているが，n 次は類推しており，それを用いて３次の正方行列の逆行列を求めたり，逆行列を用いて連立方程式を解く方法を扱っているものもある。そこで，３次の正方行列の逆行列の公式と n 次の正方行列の逆行列の公式を導いて理解を深め，そして逆行列の計算を行いより簡単で能率的な計算の仕方について考察する。

2　逆 行 列 の 公 式

３次の正方行列の逆行列について考える。

解１　定義による方法

$$AX=E$$

をみたす行列 X が存在すれば

$$|AX|=|E|=1$$

したがって，$|AX| = |A|\cdot|X| = |E| = 1$ より

$\therefore |A| \neq 0$

逆に $|A| \neq 0$ ならば $AX = E$ をみたす行列 X が存在することを示す。この条件が満足されている 3×3 行列を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad |A| \neq 0$$

とする。まず，求める逆行列を

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

とおく。すると，逆行列の定義から

$$AA^{-1} = E$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

左辺の行列の積を計算すると

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 & a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}z_2 & a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13}z_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 & a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}z_2 & a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23}z_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 & a_{31}x_2 + a_{32}y_2 + a_{33}z_2 & a_{31}x_3 + a_{32}y_3 + a_{33}z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 = 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}z_2 = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}z_2 = 1 \\ a_{31}x_2 + a_{32}y_2 + a_{33}z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13}z_3 = 0 \\ a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23}z_3 = 0 \\ a_{31}x_3 + a_{32}y_3 + a_{33}z_3 = 1 \end{cases}$$

ここで，$|A| \neq 0$ であることから，クラメルの公式より

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Big/ |A|, \qquad y_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \Big/ |A|,$$

$$z_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \Big/ |A|$$

ところが，x_1，y_1，z_1 の分子の行列式はそれぞれ $|A|$ を第 1 列，第 2 列，第 3 列で余因子展開したときの余因子 A_{11}，A_{12}，A_{13} そのものになっているから

$$x_1 = \frac{A_{11}}{|A|},\ y_1 = \frac{A_{12}}{|A|},\ z_1 = \frac{A_{13}}{|A|}$$

同様にして

$$x_2 = \frac{A_{21}}{|A|},\ y_2 = \frac{A_{22}}{|A|},\ z_2 = \frac{A_{23}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{A_{31}}{|A|},\ y_3 = \frac{A_{32}}{|A|},\ z_3 = \frac{A_{33}}{|A|}$$

これらを A^{-1} に代入すると

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{bmatrix}$$

また，$A^{-1}A=E$ すなわち

$$\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}+A_{31}a_{31} & A_{11}a_{12}+A_{21}a_{22}+A_{31}a_{32} & A_{11}a_{13}+A_{21}a_{23}+A_{31}a_{33} \\ A_{12}a_{11}+A_{22}a_{21}+A_{32}a_{31} & A_{12}a_{12}+A_{22}a_{22}+A_{32}a_{32} & A_{12}a_{13}+A_{22}a_{23}+A_{32}a_{33} \\ A_{13}a_{11}+A_{23}a_{21}+A_{33}a_{31} & A_{13}a_{12}+A_{23}a_{22}+A_{33}a_{32} & A_{13}a_{13}+A_{23}a_{23}+A_{33}a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

が成り立つことも確認しておかなければならない。

上式から得られる9つの式

$$A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}+A_{31}a_{31}=|A|$$
$$A_{12}a_{11}+A_{22}a_{21}+A_{32}a_{31}=0$$
$$A_{13}a_{11}+A_{23}a_{21}+A_{33}a_{31}=0$$
$$A_{11}a_{12}+A_{21}a_{22}+A_{31}a_{32}=0$$
$$A_{12}a_{12}+A_{22}a_{22}+A_{32}a_{32}=|A|$$
$$A_{13}a_{12}+A_{23}a_{22}+A_{33}a_{32}=0$$
$$A_{11}a_{13}+A_{21}a_{23}+A_{31}a_{33}=0$$
$$A_{12}a_{13}+A_{22}a_{23}+A_{32}a_{33}=0$$
$$A_{13}a_{13}+A_{23}a_{23}+A_{33}a_{33}=|A|$$

を示せばよい。ところで，これらの式のうち，右辺に $|A|$ のある3つの式は $|A|$ の余因子展開の式そのものであるから確かに成り立つ。その他の等式を示す。

たとえば，余因子 A_{12}，A_{22}，A_{32} がそれぞれ，

$$A_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{vmatrix}$$

と表せるから

$$A_{12}a_{11}+A_{22}a_{21}+A_{32}a_{31}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

残りの等式も同様に成り立つことがいえるから $A^{-1}A=E$ も成立する。

ゆえに

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|} & \dfrac{A_{31}}{|A|} \\ \dfrac{A_{12}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|} & \dfrac{A_{32}}{|A|} \\ \dfrac{A_{13}}{|A|} & \dfrac{A_{23}}{|A|} & \dfrac{A_{33}}{|A|} \end{bmatrix}$$

解2　余因子行列を利用する方法

$$AX=E$$

をみたす行列 X が存在すれば

$$|AX|=|E|=1$$

したがって，$|AX|=|A|\cdot|X|=|E|=1$ より

$$|A|\neq 0$$

逆に $|A|\neq 0$ ならば $AX=E$ をみたす行列 X が存在することを示す。

この条件が満足されている 3×3 行列を

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ |A| \neq 0$$

とする。

a_{ij} と $|A|$ における余因子 A_{ij} との間に

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{cases} |A|(i=j) \\ 0\ (i \neq j) \end{cases}$$

の関係があるから，$A=[a_{ij}]$ に $[A_{ji}]$ をかけると

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}=|A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| \neq 0$ だから

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって

$$X=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

とおけば，これが $AX=E$ をみたす行列である。

また

$$XA=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}+A_{31}a_{31} & A_{11}a_{12}+A_{21}a_{22}+A_{31}a_{32} & A_{11}a_{13}+A_{21}a_{23}+A_{31}a_{33} \\ A_{12}a_{11}+A_{22}a_{21}+A_{32}a_{31} & A_{12}a_{12}+A_{22}a_{22}+A_{32}a_{32} & A_{12}a_{13}+A_{22}a_{23}+A_{32}a_{33} \\ A_{13}a_{11}+A_{23}a_{21}+A_{33}a_{31} & A_{13}a_{12}+A_{23}a_{22}+A_{33}a_{32} & A_{13}a_{13}+A_{23}a_{23}+A_{33}a_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるから $XA=E$ も成り立つ。

ゆえに

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{bmatrix}$$

次に n 次の正方行列の逆行列の公式を考える。

定理　n 次の行列 $A=[a_{ij}]$ について，A が正則であるための，すなわち，その逆行列が存在するための必要十分条件は

$|A|=0$

である。そのとき，要素 a_{ij} の余因子を A_{ij} として，逆行列は次式で与えられる。

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots\cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots\cdots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots\cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

証明

［必要性］ 逆行列 A^{-1} が存在すると仮定する。$AA^{-1}=E$ の両辺の行列式は

左辺 $=|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|$

右辺 $=|E|=1$

となる。ゆえに $|A|\neq 0$

［十分性］ $|A|\neq 0$ と仮定する。このとき，式(1)で与えられる行列は存在する。それを X とおく。

$$AX=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots\cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots\cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \sum a_{1k}A_{1k} & \sum a_{1k}A_{2k} \cdots\cdots & \sum a_{1k}A_{nk} \\ \sum a_{2k}A_{1k} & \sum a_{2k}A_{2k} \cdots\cdots & \sum a_{2k}A_{nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum a_{nk}A_{1k} & \sum a_{nk}A_{2k} \cdots\cdots & \sum a_{nk}A_{nk} \end{bmatrix}$$

となる。ところが

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} |A| & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

であるので

$$AX=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}|A| & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & |A| & \cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & |A|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1\end{bmatrix}=E$$

ゆえに，逆行列は存在し，それは式(1)で与えられる。すなわち $X=A^{-1}$ である。

3 逆行列の計算

例題

$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{bmatrix}$ が正則行列かどうか判定し，正則の場合にはその逆行列を求めよ。

解1 公式の利用による方法

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ -8 & 0 & -10\end{vmatrix}\underset{\text{展開}}{\overset{c_2\text{で}}{=\!=\!=}}1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -8 & -10\end{vmatrix}$$

$=-18\neq 0$ であるから A は正則行列である。

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-13 \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{vmatrix}=10 \quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -4\end{vmatrix}=11 \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-14 \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5 \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-8 \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1$$

よって

$$A^{-1}=-\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-13 & 10 & 1\\ 11 & -14 & -5\\ 5 & -8 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13/18 & -5/9 & -1/18\\ -11/18 & 7/9 & 5/18\\ -5/18 & 4/9 & -1/18\end{bmatrix}$$

この方法で逆行列を求めることは，理論的には分かりやすいが，実際には複雑な計算をしなければならない。すなわち，何度も行列式の値を計算しなければならずめんどうである。この例題からも分かるように，A が3次の行列の場合には，1個の3次の行列式と $3^2=9$ 個の2次の行列式の値を求めなければならない。一般に A が n 次の場合には (n^2+1) 個の行列式の値の計算が必要である。3次の正方行列まではさほどではないが，4次以上になると厄介で次数が高まるにつれ，計算の煩雑さは，加速度的に増大する。$n=4$ のとき17個の3次および4次の行列式，$n=5$ のとき26個の4次および5次の行列式を計算しなければならない。

解2　ガウス・ジョルダンの消去法による方法

(1)　簡便法による解法

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ -8 & 0 & -10\end{vmatrix}\underset{\text{展開}}{\overset{c_2\text{で}}{=\!=\!=}}1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -8 & -10\end{vmatrix}$$

$= -18 \neq 0$ であるから A は正則行列である。

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{を交換}]{r_1\text{と}r_3}\begin{bmatrix}1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & 11 & 0 & 1 & -2\\ 0 & -8 & 14 & 1 & 0 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{5}r_2}\begin{bmatrix}1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{11}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & -8 & 14 & 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+8r_2]{r_1-3r_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{5} & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{5}{18}r_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{5} & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{18} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+\frac{11}{5}r_3]{r_1-\frac{13}{5}r_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13/18 & -5/9 & -1/18 \\ 0 & 1 & 0 & -11/18 & 7/9 & 5/18 \\ 0 & 0 & 1 & -5/18 & 4/9 & -1/18 \end{bmatrix}$$

よって

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 13/18 & -5/9 & -1/18 \\ -11/18 & 7/9 & 5/18 \\ -5/18 & 4/9 & -1/18 \end{bmatrix}$$

(2) 表による解法

行基本操作	A			E			行
	3	1	2	1	0	0	①
	2	1	3	0	1	0	②
	1	3	−4	0	0	1	③
①⟷③	1	3	−4	0	0	1	③
	2	1	3	0	1	0	②
③⟷①	3	1	2	1	0	0	①
	1	3	−4	0	0	1	③′
②+③×(−2)	0	−5	11	0	1	−2	②′
①+③×(−3)	0	−8	14	1	0	−3	①′

③′+②″×(−3)	1	0	13/5	0	3/5	−1/5	③″
②′×$\left(-\frac{1}{5}\right)$	0	1	−11/5	0	−1/5	2/5	②″
①′+②″×8	0	0	−18/5	1	−8/5	1/5	①″
③″+①‴×$\left(-\frac{13}{5}\right)$	1	0	0	13/18	−5/9	−1/18	③‴
②″+①‴×$\frac{11}{5}$	0	1	0	−11/18	7/9	5/18	②‴
①″×$\left(-\frac{5}{18}\right)$	0	0	1	−5/18	4/9	−1/18	①‴

よって

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 13/18 & -5/9 & -1/18 \\ -11/18 & 7/9 & 5/18 \\ -5/18 & 4/9 & -1/18 \end{bmatrix}$$

ガウス・ジョルダンの消去法を用いて逆行列を求めることは，行列 A を単位行列にすることである。計算量は多いが原理は消去操作のみで解法が分かりやすい。

解3 ガウスの消去法の利用による方法

(1) 簡便法による解法

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -10 \end{vmatrix} \underset{\text{展開}}{\overset{c_2\text{で}}{=\!=\!=}} 1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -8 & -10 \end{vmatrix}$$

$= -18 \neq 0$ であるから A は正則行列である。

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{を交換}]{r_1\text{と}r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & 14 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{8}{5}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

したがって，次の3組の連立1次方程式の解を求めればよい。

$$\begin{cases} x+3y-4z=0 \\ -5y+11z=0 \\ -\frac{18}{5}z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y-4z=0 \\ -5y+11z=1 \\ -\frac{18}{5}z=-\frac{8}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y-4z=1 \\ -5y+11z=-2 \\ -\frac{18}{5}z=\frac{1}{5} \end{cases}$$

これらの解を後退代入によって求める。

$$x=\frac{13}{18},\ y=-\frac{11}{18},\ z=-\frac{5}{18} \qquad x=-\frac{5}{9},\ y=\frac{7}{9},\ z=\frac{4}{9}$$

$$x=-\frac{1}{18},\ y=\frac{5}{18},\ z=-\frac{1}{18}$$

よって

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 13/18 & -5/9 & -1/18 \\ -11/18 & 7/9 & 5/18 \\ -5/18 & 4/9 & -1/18 \end{bmatrix}$$

ガウスの消去法を用いて逆行列を求めることは，前進消去で行列 A を上三角行列にすることである。後退代入で連立方程式にする必要はない。後退代入を明確にするためにあえて書いている。学習の最初では連立方程式にすることによって分かりやすくなり間違いを防ぐことになる。なお，後退代入の過程を行列を用いて次のように表すこともできる。しかし，必ずしも簡単にはならない。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3\times\left(-\frac{5}{18}\right)}$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{18} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{18} \end{bmatrix}
\xrightarrow[r_2-11r_3]{r_1+4r_3}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{5}{9} & \frac{16}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & -5 & 0 & \frac{55}{18} & -\frac{35}{9} & -\frac{25}{18} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{18} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{18} \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_2\times\left(-\frac{1}{5}\right)}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -10/9 & 16/9 & 7/9 \\ 0 & 1 & 0 & -11/18 & 7/9 & 5/18 \\ 0 & 0 & 1 & -5/18 & 4/9 & -1/18 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_1-3r_2}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13/18 & -5/9 & -1/18 \\ 0 & 1 & 0 & -11/18 & 7/9 & 5/18 \\ 0 & 0 & 1 & -5/18 & 4/9 & -1/18 \end{bmatrix}
$$

(2)　表による解法

行基本操作	A			E			行
	3	1	2	1	0	0	①
	2	1	3	0	1	0	②
	1	3	−4	0	0	1	③
①⟷③	1	3	−4	0	0	1	③
	2	1	3	0	1	0	②
③⟷①	3	1	2	1	0	0	①
	1	3	−4	0	0	1	③′
②+③×(−2)	0	−5	11	0	1	−2	②′
①+③×(−3)	0	−8	14	1	0	−3	①′

前進消去

	1	3	−4	0	0	1	③″	
	0	−5	11	0	1	−2	②″	
①′+②″$\times\left(-\frac{8}{5}\right)$	0	0	−18/5	1	−8/5	1/5	①″	
③″+①‴×4	1	3	0	−10/9	16/9	7/9	③‴	
②″+①‴×(−11)	0	−5	0	55/18	−35/9	−25/18	②‴	
①″$\times\left(-\frac{5}{18}\right)$	0	0	1	−5/18	4/9	−1/18	①‴	後退代入
③‴+②‴×(−3)	1	0	0	13/18	−5/9	−1/18	③⁗	
②‴$\times\left(-\frac{1}{5}\right)$	0	1	0	−11/18	7/9	5/18	②⁗	
	0	0	1	−5/18	4/9	−1/18	①⁗	

よって

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 13/18 & -5/9 & -1/18 \\ -11/18 & 7/9 & 5/18 \\ -5/18 & 4/9 & -1/18 \end{bmatrix}$$

4　解法の演算回数

加減法は乗除法よりはるかに簡単であるから，ここでは一応乗除法だけを問題にして，各解法における乗除法の回数を計算する。

(1)　公式の利用による解法

行列式 $|A|$ について　　$n!(n-1)$ 回

各余因数について　　$(n-1)!(n-2)$ 回

全余因数について　　$n^2(n-1)!(n-2)$ 回

最後の除法について　　n^2 回

したがって，全部では

$$n!(n-1)+n^2(n-1)!(n-2)+n^2$$

$$=n\cdot n!-n!+n^2\cdot n!-2\cdot n^2(n-1)!+n^2$$

$= n!(n^2-n-1)+n^2$ 回

(2)　ガウス・ジョルダンの消去法の利用による解法

第1段階

「かなめ」の係数を含む行について　　$2n$ 回

他の各行について　　$2n$ 回

したがって，第1段階全部で　　$n\cdot 2n$ 回

第2段階では未知数が1つ減るから　　$n(2n-1)$ 回

同様に第3段階では　　$n(2n-2)$ 回

よって，全部では

$$n\cdot 2n+n(2n-1)+n(2n-2)+\cdots\cdots+n(n+1)$$

$$=n\{2n+(2n-1)+(2n-2)+\cdots\cdots+(n+1)\}$$

$$=n\cdot\frac{n\{2n+(n+1)\}}{2}=\frac{n^2(3n+1)}{2}\text{ 回}$$

(3)　ガウスの消去法の利用による解法

前進消去において

第1段階全部で　　$2n(n-1)$ 回

第2段階では行と未知数がそれぞれ1つ減るから　　$(2n-1)(n-2)$ 回

同様に第3段階では　　$(2n-2)(n-3)$ 回

よって，全部では

$$2n\cdot(n-1)+(2n-1)(n-2)+(2n-2)(n-3)+\cdots\cdots+(n+2)\cdot 1$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\{(n+1)+k\}k=(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

$$=(n+1)\cdot\frac{(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}n(5n^2-3n-2)\text{ 回}$$

後退代入において

n 組の n 元連立1次方程式を解くことになるから

$$n(1+2+\cdots\cdots+n)=\frac{n^2(n+1)}{2}\text{回}$$

よって，全部で

$$\frac{1}{6}n(5n^2-3n-2)+\frac{n^2(n+1)}{2}=\frac{n(8n^2-2)}{6}\text{回}$$

この３つの解法がどれほど違うかは次の表の通りである。

n	$n!(n^2-n-1)+n^2$	$\frac{n^2(3n+1)}{2}$	$\frac{n(8n^2-2)}{6}$
2	6	14	10
3	39	45	35
4	280	104	84
5	2305	200	165
6	20916	342	286
7	206689	539	455
⋮	⋮	⋮	⋮

したがって，逆行列の公式は，逆行列を成分で形式的に表現できる点に価値がある。数値計算のための公式ではない。具体的な数値が与えられているときの逆行列の計算には，ガウスの消去法が便利である。

5 ま と め

テキストは，逆行列を求めるのにできるだけ簡単な数値になるよう配慮しているが，手計算をする場合は特に演算回数が少ないことが肝要である。

逆行列の公式の利用では，行列式の値の計算が大変であり，次数の高まるにつれ計算の煩雑さは，加速度的に増大する。ガウス・ジョルダンの消去法は，消去法一辺倒ですみ逆行演算が不要であり，プログラムは簡単であるが計算量が多い。連立方程式の解を計算したり，逆行列を計算することができる。ガウスの消去法は，計算量が最も少なく，また，プログラムも現在では手続き向き言語によって複雑ということはない。連立方程式の解を計算したり，逆行列を

計算することができ，更に行列式の値や行列の階数を求めたりすることにも使用される。線形代数の学習に際して，逆行列の計算には専ら手計算によっていることを考えれば，最も計算量の少ないガウスの消去法の利用がよいと考える。

参考文献

1) 服部雄一・片山登揚共著「線形代数と線形計算」培風館　1994年　P 98～P 104
2) 稲刈四三二著「行列式」共立出版　1996年　P 78～P 81
3) 石川忠孝著「連立一次方程式の消去法の指導について」松山大学論集第8巻第1号，松山大学学術研究会　平成8年　P 151～P 165
4) 片桐重延・室岡和彦共著「行列と線形計算」東京電機大学出版局　1995年　P 74～P 78，P 84～P 88
5) 宮本敏雄著「線形代数入門」東京図書　1973年　P 149～P 168
6) 永田幸令・三好武雄共著「プラティカル基礎数学」開成出版　1997年　P 26～P 29
7) 薩摩順吉・四ツ谷晶二共著「キーポイント線形代数」岩波書店　1993年　P 36～P 48
8) 田河生長・岡部　章・斎藤　斉・高遠節夫・山本茂樹共著「線形代数」大日本図書　1998年　P 66～P 76
9) 田代嘉宏・難波完爾編「新編高専の数学2」森北出版　1994年　P 205～P 207，P 213～P 214
10) 矢ケ部厳著「代数」共立出版　1981年　P 121～P 134