

ネットワークの規模と侵入の可能性*

安 田 俊 一

1 は じ め に

ごく最近話題になったネットワークへの相次ぐ侵入事件はインターネットが持つ弱点をさらす結果となった。ネットワークの拡大は有用性を高めると同時にネット自体への攻撃（クラッキング¹⁾）の可能性をも増している。

今年に入ってアメリカの Yahoo をはじめいくつかの大手インターネット企業のホームページへアクセスできないという事態が発生し深刻な問題を投げかけた。この攻撃には「分散型サービス拒否攻撃 (Distributed Denial of Service Attack)²⁾」と呼ばれる攻撃手法がもちいられた。これはネットにアクセスしているコンピュータに小さな「兵士」となるようなプログラムを送り込んで待機させておき、「司令官」となるプログラムの合図によって、特定のサーバーへ一斉に攻撃をかける、新しいタイプのクラッキング手法である。

従来の手法では、悪意をもった特定のネット参加者が、自分のマシンあるいは他人のマシンを経由して攻撃をかけるのが普通であった。この際にはクラッ

* この研究は1996年度松山大学研究助成金による成果の一部である。

- 1) ネットワークへの不正アクセスなどの行為を「ハック」行為者を「ハッカー」とよぶ習慣がまだ残っているが、この言葉の使い方はコンピュータ技術者の間では問題視されており、最近では行為を「クラック」あるいは「クラッキング」、行為者を「クラッカー」と呼ぶ。
- 2) あるいは「分散型協調攻撃 (Distributed Coordinated Attack)」ともいう。Linux Japan May 2000 のコラムによるとこの攻撃のためのツールがあり、すでに Windows 98 をターゲットにしたものが現れている。Windows 98 はそもそもセキュリティが甘いのに加えて、ユーザーの多くはセキュリティに無関心であるため膨大な数の潜在的「兵士」が存在することになる。

カー自身が攻撃に用いるマシンを特定しており、それゆえ進入経路をたどることとクラッカーの発見が可能である。「分散型サービス拒否攻撃」はネット上の不特定多数のマシンを攻撃に用いる点が大きく異なる。この方法ではオンラインにある、クラッカー以外のユーザーマシンが気づかないうちに攻撃マシンになってしまっていて、「兵士」となったマシンの所有者が、自分のマシンが攻撃に参加していることに気づかない場合も多く、クラッカー自身もどのマシンが攻撃に参加しているのか必ずしも把握しているわけではない。それゆえ「司令官」を特定することも困難である。

このようにネット上の不特定多数のマシンを利用した不正行為は明らかな悪意に基づくものばかりではない。インターネット上の資源を有効に使う、という観点から開発された「Napster」は、Napster サーバーに接続中のマシンの記憶装置にある MP3 音楽リソースの一覧を作成し、ネット参加者が自分が所有していない音楽でも聴けるようにするソフトウェアである。これはリソースのダウンロードとローカルマシンへの保存を伴うため、著作権との関係で問題視されているが、このケースにみるようにオンラインにあるマシンのリソースを有効利用するために開発されたソフトでも重大な問題を引き起こすこともあり得る。

資源の有効利用という観点からはネットワークの規模は大きければ大きい程良い。同時に「分散型サービス拒否攻撃」のように明確な悪意をもったソフトの観点からもネットワーク規模が大きければ大きいほど侵入しやすくなることになる。ここにネットワークの拡大にともなう矛盾の現れをみることができる。

本稿の目的は、このように規模の拡大が利益を生むと同時に不利益の可能性をも拡大させるシステムにおいて最適な規模の拡大率を検討することにある。

2 クラックされないケース

クラックの可能性を考慮しなくてよいケース、すなわち規模の拡大が不利益をもたらさないケースは Kamien and Schwartz (1981) が Section 8 の Exam-

ple で取り上げているモデルと形式上同じになる。

企業は収入の中から投資を行う。投資はその企業の資本ストックを増大させ、増大した資本ストックは収入をさらに増大させる。この枠組みの中で最適な投資を決定するのが問題である。

資本ストックをネットワーク規模と読み替えてみよう。ここでネットワークの規模は企業が提供するネットワークのノード数やサーバーの能力、サービスの種類や質などであると考えてよい。これらは放っておくと技術の陳腐化や機械的な劣化によって每期減少していく。これは以下のモデルで定式化する資本ストックの減価に対応している。

したがって、これはネットワークの拡大が利益をもたらす状況と全く同じであると考えてよい。ネットワーク規模の拡大はユーザーを増加させ、収入を増加させる。収入の中から規模を拡大するための投資を行うとして、最適な拡大経路はどのようなものか？

以下でモデルを定式化し、最適解を検討しよう。

2.1 モデル

収入 (π) はネットワーク規模 (x) (以下、規模) の増加関数であり、以下の性質を持っている。

$$\pi = \pi(x), \frac{d\pi}{dx} > 0, \frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$$

投資 (u) を行う際には費用がかかる。その費用関数を $c(u)$ とする。

$$c(0) = 0, \frac{dc}{du} > 0, \frac{d^2c}{du^2} > 0$$

t -期の利潤は

$$\pi(x(t)) - c(u(t)) \quad (1)$$

規模の増分は投資によって決まる。 t -期の規模の増分は投資から減価償却をのぞいたものである。減価償却率を b とすると、規模の運動方程式は

$$\frac{dx}{dt} = u(t) - bx(t) \quad (0 < b < 1) \quad (2)$$

企業は制約(2)式のもとで目的関数(1)の割引現在価値を最大にするように $u(t)$ の経路を決定する。そこで問題は

$$\max_{u(t)} \int_0^{\infty} e^{-rt} \{ \pi(x(t)) - c(u(t)) \} dt$$

subject to

$$\frac{dx}{dt} = u(t) - bx(t), \quad x(0) = x_0$$

ここで $r(0 < r < 1)$ は割引率である。

2.2 最適解

上の問題は無限期間モデルであるので長期均衡点の分析が中心となる。

諸条件から $u-x$ 平面に描いた位相図は図1になる (Appendix A)。 $\dot{u} = 0$,

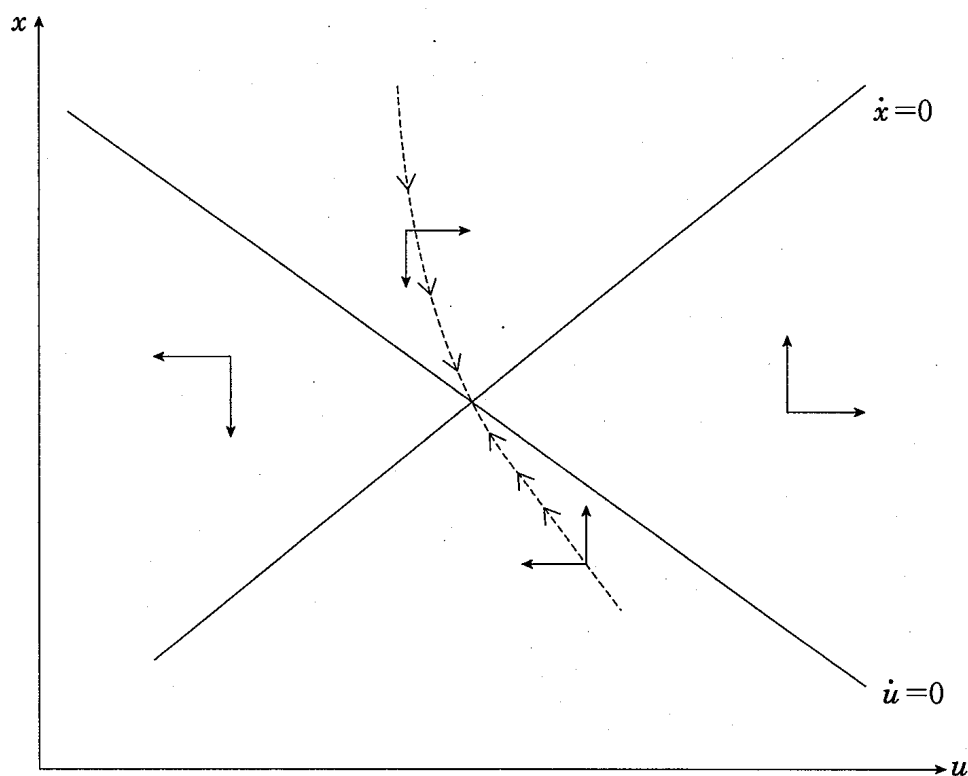


図1：クラックされない場合

$\dot{x} = 0$ の交点である均衡点は鞍点均衡点であり、均衡へ向かう 1 本の経路が存在するがそれに乗らなければ体系は発散する。発散する場合は結局規模は無限に拡張し、投資も無限大へ発散することもありうる。

もちろん現実には物理的な制約がどこかにあるはずであるが、投資の上昇、規模の拡大という組み合わせはこの問題をネットワーク規模の最適拡大経路と考えたときに、ここ数年の爆発的なインターネットの拡大を想起させる。

このモデルではクラックの可能性は考慮されていない。規模の拡大→利益の増大という直線的な関係が想定されているだけである。次節では規模の拡大が不利益をも増大させる可能性について考えよう。

3 侵入の可能性

本稿のはじめに述べたようにネットワーク規模の拡大はクラックの可能性をも増大させる。以下ではクラックされる確率が規模の増加関数である場合に最適拡大経路を考察する。

3.1 侵入確率

ネットワークがクラックされる確率を F とする。この確率は規模 x の関数であって、以下の関係を満たすものとする。

$$\frac{dF}{dx} > 0, \frac{d^2F}{dx^2} < 0, F(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

侵入される確率は規模の大きさの増加関数であり、ネット規模が無限大に近づくにつれて侵入される確率は 1 に近づいていく。

このような性質をもった関数は最適研究開発投資決定モデルでよく使われる(安田俊一(1996)の参考文献を参照)。それらの研究では、ここでの文脈でいえば「 t 期まで侵入されないという条件の下で次の期に侵入される条件付き確率」

$$h \equiv F'/(1-F)$$

を考慮する。

たとえばよく用いられるような

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

という関数では $h = \lambda$ となる。

したがって、 h をどのように想定するかが分析の結果に大きく影響を与える。機械の故障確率を取り扱った Kamien and Schwartz (1971) のモデルではこの条件付き確率 h を時間の関数としているし、Reinganum (1989) 等では R&D 投資の関数になっている。

本稿では単純化のためにこれを定数として取り扱う。この条件付き確率が定数であっても $F(x)$ 自身は x の増加関数であることに注意しておこう。

3.2 モデル

2.1 で取り扱ったクラックのないモデルとの相違は目的関数に入ってくる利潤が侵入確率を考慮した期待利潤になることである。

現実には多少の侵入が起きてもネットワーク全体が止まってしまうことはなく、たいていはすぐに復旧されるが、ここでは極端な例を仮定し、ネットワークに侵入された場合の利益を 0 と仮定しよう。侵入が起きない確率は $1 - F$ であるから、 t 期の期待利潤は

$$[\pi(x(t)) - c(u(t))](1 - F(x(t))) \quad (3)$$

企業は制約(2)の下で割引期待利得を最大にする。

問題は

$$\max_{u(t)} \int_0^{\infty} e^{-rt} [\pi(x(t)) - c(u(t))](1 - F(x(t))) dt$$

subject to

$$\frac{dx}{dt} = u(t) - bx(t), \quad x(0) = x_0$$

となる。

4 最適解

この問題は形式的には2.1で取り扱った問題に $(1-F(x))$ の項が付け加わっただけだが、これが非線形項をもたらし、2つの均衡点を発生させる。以下ではそれをみよう。

4.1 解の形状

この問題の必要条件から、投資 $u(t)$ 、規模 $x(t)$ について以下の運動方程式を得る (Appendix B)。

$$c''\dot{u} = c'\{h(u-bx)+(r+b)\}-\pi'+h(\pi(x)-c(u)) \quad (4)$$

$$\dot{x} = u - bx \quad (5)$$

ここで、

$$h \equiv \frac{F'(x)}{1-F(x)}$$

であって、上述のようにこれを定数とみなす。また煩雑さをさけるために時刻 t を省略している。

関数を特定しなければ(4)式の形状は把握できない。そこで以下では収入関数 $\pi(x)$ と費用関数 $c(u)$ を次のように特定しよう。

$$\pi(x) = \alpha x, \quad c(u) = \frac{1}{2}u^2$$

すると(4)は

$$\dot{u} = \{h(u-bx)+(r+b)\}u - \alpha + h(\alpha x - \frac{1}{2}u^2) \quad (6)$$

となる。

$u-x$ 平面上で位相図を描くために(6)(5)のそれぞれの右辺を0とおくと、

$$x = \frac{\frac{1}{2}hu^2 + (r+b)u - \alpha}{(bu - \alpha)h} \quad (u \neq \alpha/b) \quad (7)$$

$$x = \frac{u}{b} \quad (8)$$

をえる。

(7)式が $\dot{u} = 0$ の曲線であり、(8)式が $\dot{x} = 0$ の直線である。

(7)の右辺はさらに

$$\frac{1}{2b}u + \frac{ah+2b(r+b)}{2b^2h} + \frac{\frac{\alpha^2h+2abr}{2b^2h}}{bu-\alpha}$$

となる。これは双曲線であって、漸近線は

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2b}u + \frac{ah+2b(r+b)}{2b^2h} \dots (\text{漸近線 1}) \\ u = \alpha/b \dots (\text{漸近線 2}) \end{cases}$$

となる。

双曲線第3項の分子

$$\frac{\alpha^2h+2abr}{2b^2h}$$

は正であるからこの双曲線は $u-x$ 平面で北東—南西に向かって開く。

$\dot{x} = 0$, 漸近線 1, 漸近線 2 のそれぞれの直線の位置関係はつぎのようになる。

まず、漸近線 1 の傾き $(1/2b)$ は、 $\dot{x} = 0$ 線の傾き $(1/b)$ の半分であり、漸近線 1 の x 軸 (縦軸) 切片は

$$\frac{ah+2b(r+b)}{2b^2h} > 0$$

であるので、漸近線 1 と $\dot{x} = 0$ 線は第 1 象限で必ず交点を持つ。漸近線 2 は垂直線であるから、もちろん他の二つの直線と交点を持つ。

$\dot{x} = 0$ と漸近線 1, 漸近線 1 と漸近線 2 の交点をそれぞれ A, B とすると (図 2), それらの x 座標は

$$\text{A 点: } \frac{ah+2b(r+b)}{b^2h}$$

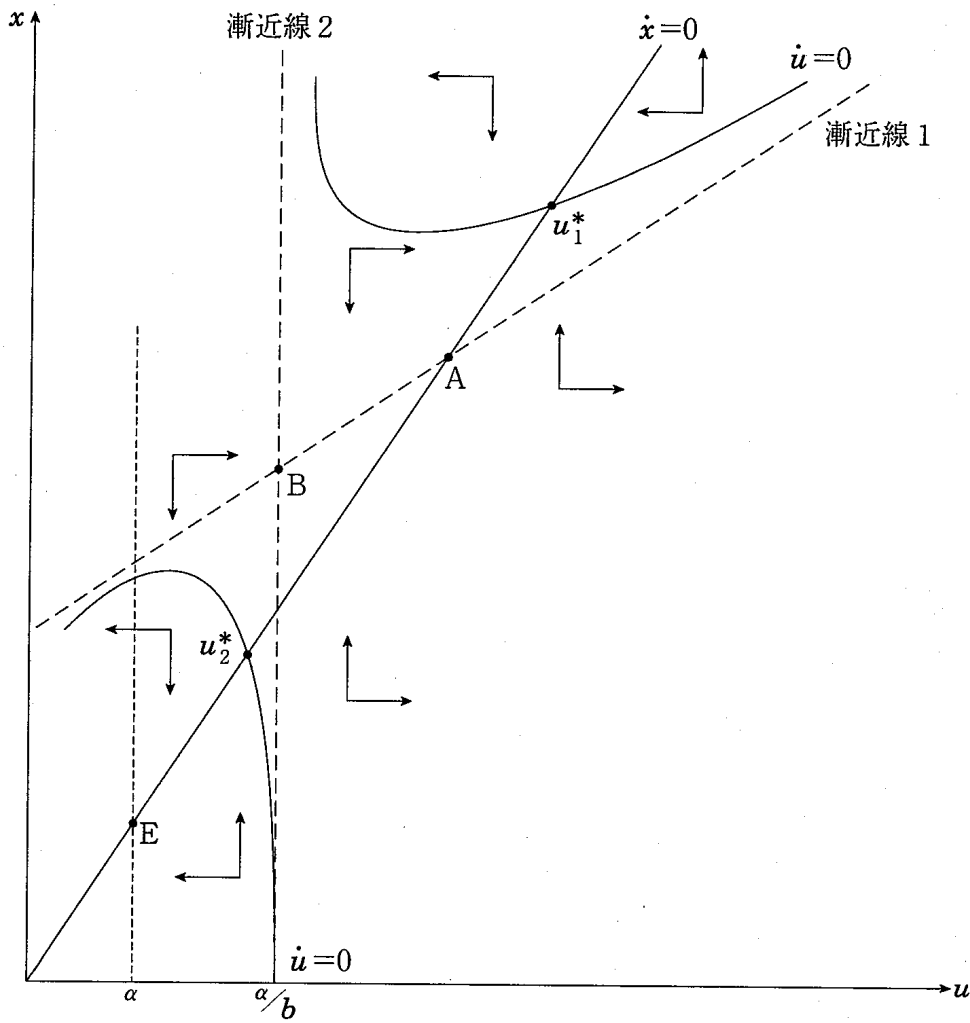


図 2 : 侵入可能性がある場合

B 点 : $\frac{ah+b(r+b)}{b^2h}$

であるから、A 点の方が B 点の上方に位置することになる。

次に $\dot{u} = 0$, $\dot{x} = 0$ の両方の交点、すなわち均衡点を考えよう。

(7)と(8)から、 u に関する 2 次方程式

$$hu^2 - 2(r+b+\frac{ah}{b})u + 2a = 0 \quad (9)$$

を得る。判別式は

$$(r+b+\frac{ah}{b})^2 - 2ha = (r+b)^2 + \frac{2abrh + a^2h^2}{b^2} > 0$$

であるから、(9)は2つの相異なる実数根をもち、また、方程式の係数からその符号は2つとも正であることがわかる。図2中の u_1^* , u_2^* が均衡点を示している。

図2において、漸近線2の右側、すなわち $u > a/b$ の領域では $\dot{u} = 0$ 線よりも x が大きければ $\dot{u} < 0$ 、したがってこの線の上側では $\dot{u} < 0$ 、下側で $\dot{u} > 0$ 。

一方漸近線2の左側、すなわち $u < a/b$ の領域では逆に $\dot{u} = 0$ 線の下側で $\dot{u} < 0$ 、上側で $\dot{u} > 0$ 。

x に関してはクラックがないモデルと同じであって、 $\dot{x} = 0$ 線の上側で $\dot{x} < 0$ 、下側で $\dot{x} > 0$ である。

図2に示した位相図からだけでも2つの均衡点は不安定点であるか鞍点であることがわかる（この点については以下の節で確認する）。

4.2 均衡点の安定性

前節で導出した均衡点の性質はどのようなものがあるだろうか。均衡点の安定性をみるために(6), (5)を均衡点のまわりで線形近似する。均衡点は2つあるが、代表して (u_s, x_s) と書くことにし、 $u_s - bx_s = 0$ であることに注意して、

$$\dot{u} = (r+b)(u-u_s) - (bu-\alpha)h(x-x_s)$$

$$\dot{x} = (u-u_s) - b(x-x_s)$$

を得る。この係数行列を A としよう。

A の特性方程式は

$$\rho^2 - r\rho - b(r+b) + (bu_s - \alpha)h = 0$$

この判別式 D は

$$D = r^2 + 4\{b(r+b) - (bu_s - \alpha)h\}$$

であるから、 $bu_s - \alpha < 0$ の場合は正である。したがって特性方程式は異なる2つの実数根を持ち、かつ

$$\det A = -b(r+b) + (bu_s - \alpha)h < 0$$

となるので、特性根は異符号である。この場合は図2の u_2^* に対応しており、こ

の点が鞍点であることを示している。

他方, $bu_s - a > 0$ のケースは u_1^* に対応している。このときは $D < 0$, すなわち特性根が複素数となる可能性がある³⁾。その場合, 実部は $r/2 > 0$ であるからこの点は不安定均衡点である。また, もし $D > 0$ であっても $\det A > 0$, $\text{tr } A > 0$ となるのでやはり不安定である。 $\det A > 0$ であるのは次の理由による。

まず, 図2から明らかに u_1^* の u 座標は点Aの u 座標よりも大きい。後者は

$$\frac{ah + 2b(r+b)}{bh}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \det A &= -b(r+b) + (bu_1^* - a)h > -b(r+b) + \left(b \frac{ah + 2b(r+b)}{bh} - a\right)h \\ &= b(r+b) > 0 \end{aligned}$$

したがって, 特性根が相異なる2つの実数である場合に, それらの積・和ともに正であるから, これら2根は両方とも正である。

以上より,

u_1^* : 不安定均衡点

u_2^* : 鞍点均衡点

であって, この体系がクラックがないケースよりも不安定性を増していることがわかる。

このモデルで仮定した関数をクラックのないケースに当てはめると, その均衡点は図2のE点になる⁴⁾。すぐに明らかのように, クラックの可能性がある場合にはそれがないケースに比べて高い規模と高い拡大率の点に均衡がある。すなわち, クラックの可能性は規模と拡大率の両方を拡大させる。

3) 実際に u_1^* を計算し, 判別式 D に代入すると

$$D = r^2 - 4\sqrt{a^2h^2 + 2brah + b^2(r+b)^2}$$

となる。したがってパラメータの大きさによってはこれが負になる可能性がある。

4) $\dot{x} = 0$ 線は変わらず, $\pi'(x) = a$, $c'(u) = u$ であるから, $\dot{u} = 0$ 線は, $u = a$ となる。 $0 < b < 1$ から $a < a/b$ なので均衡点は図2における漸近線2よりも左側にくる。

ただし、このモデルはクラックの可能性がない場合もそれがある場合も均衡点は鞍点、もしくは不安定点でしかない。このことはもともとこのように「拡大が拡大をよぶ」ような体系がきわめて不安定であることを意味している。

侵入の条件付き確率 h の変化は体系にどのような効果をもたらすであろうか。均衡点が不安定であるため均衡点相互の比較はあまり意味がないが、全体の状況は把握できるであろう。

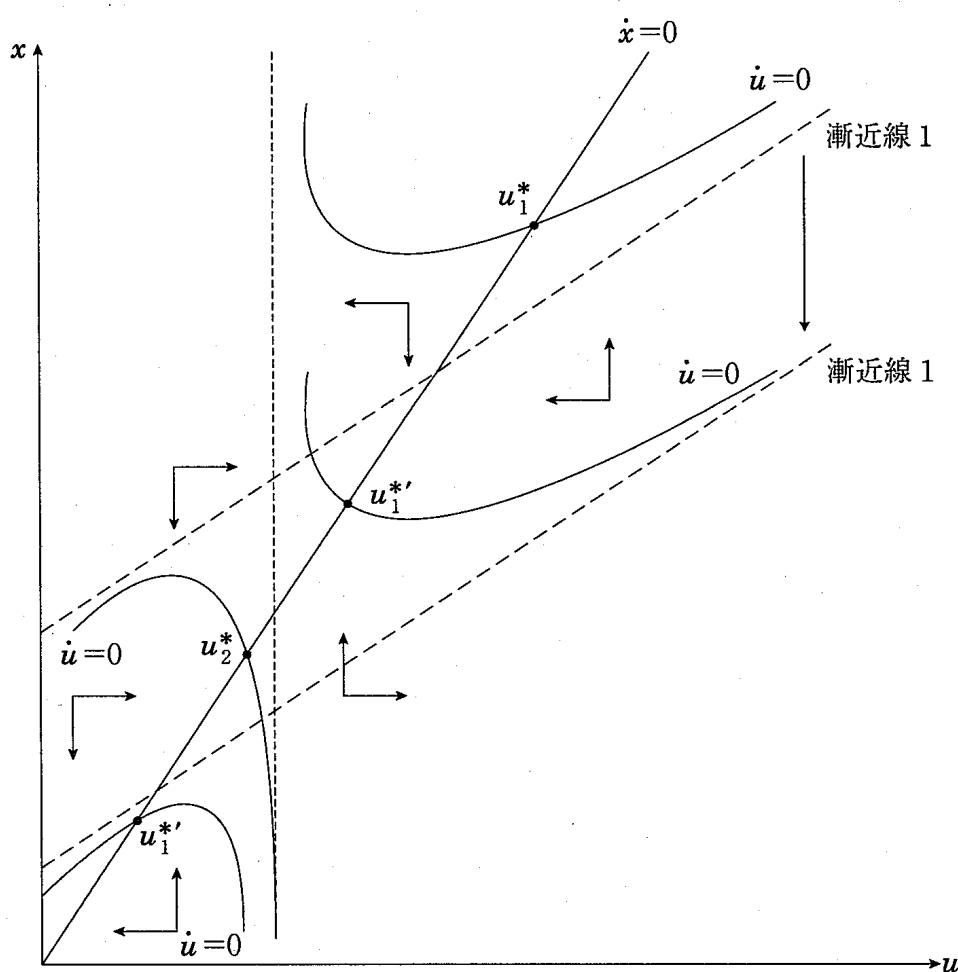


図3：侵入確率が上昇する場合

h が増加したとしよう。このとき漸近線1は切片の低下によって下方に移動する。それに伴って $\dot{u} = 0$ 線も下方に移動するため均衡点は u_1^* 点は $u_1'^*$ 点へ、 u_2^* 点は $u_2'^*$ 点に移る(図3)。 h の変化前にたまたまこのシステムが u_2^* 点

にあったとしよう。この場合にはうまくパスにのることができれば新しい均衡点へ向かう。結果、実現されるのは規模が縮小されたシステムである。パスにのらなかった場合には旧均衡点は新しい $\dot{u} = 0$ 線の上側なので、拡大投資は増加する。すると $\dot{x} = 0$ 線の下側にくるので規模は拡大を始め、発散する。

システムがやはりたまたま u_i^* にあった場合、それは新しい $\dot{u} = 0$ 線の上側なので、いったん規模も投資も縮小するが、やがて新しい \dot{u} 線の下側へ動き、 u が上昇をはじめ。するとそのうち $\dot{x} = 0$ 線の下側へ動くので、 u , x 共に上昇し、カーブを描きながらやはりシステムは発散へ向かう。

5 お わ り に

以上の結果から、

- ・クラックの可能性がないとしても「拡大が利益を呼ぶ」ようなポジティブフィードバックを内蔵しているシステムでは均衡点があっても鞍点であり、きわめて容易に発散する。
- ・一方でクラックの可能性によって拡大を止める要素をシステムに入れた場合、より拡大された規模の均衡点があらたに出現するが、それは不安定な均衡であり、やはり容易に発散する。
- ・クラックされる確率が大きくなれば、たとえ初期に均衡状態にあったとしても規模は拡大する方向に発散する可能性が大きい。

ということがわかった。モデルのこの性質は、ここ数年でのインターネットの拡大のように、いったん拡大し始めると急速に膨張するシステムの性格を表しているものと考えられる。

インターネットがクラッキングによって大きな危険にさらされているという指摘は最近多い。しかも本稿のはじめに指摘したようにクラックの可能性は規模の拡大とともに大きくなっている。しかしながらシステムの不安定性は、「侵入の可能性」といったネガティブ要素の増大を持ってしても、拡大を押しとどめ、規模を縮小に向かわせることができないし、ましてや「最適なネット規模」

のような steady な世界へ落ち着かせることもできない。「規模の拡大が利益を生み、利益の一部が規模の拡大へ再投資される」というようなポジティブフィードバックを内蔵しているシステムでは、多少のネガティブフィードバックが組み込まれていても発散しがちなシステムになる。ネットの拡大によってクラックの可能性が大きくなったとしてもネットの拡大は止まらないのである。

このモデルでは比較的単純な目的関数と制約条件であったにも関わらず、収入関数と費用関数を特定化し、かつ侵入の条件付き確率 h を定数にしなければ複雑になりすぎてモデルの性質を明らかにすることができなかった。このような特定の関数がシステムのふるまいに影響を与えていることはあり得ることである。

システムが膨張しやすい性質は、収入関数が固定係数になっていて収穫逨減関数になっていない、という点にもあるかもしれない。また、規模に応じて条件付き確率 h 自身が大きくなるようなモデルにすればネガティブフィードバックが働いて発散を止めることができるかもしれない。とくに h を $h(x)$ のように規模の関数にすることは重要であるように思える。今後の課題としたい。

A クラックの可能性がないケース

現在価値 Hamiltonian H を

$$H \equiv \pi(x) - c(u) + \lambda(u - bx)$$

とする。一階の条件から、

$$\frac{dH}{du} = -c'(u) + \lambda = 0 \quad (10)$$

$$\dot{\lambda} = r\lambda - \frac{dH}{dx} = (r+b)\lambda - \pi' \quad (11)$$

(10)式を時間微分して(11)式を使い、

$$c''\dot{u} = (r+b)c'(u) - \pi'(x) \quad (12)$$

を得る。一方

$$\dot{x} = u - bx \quad (13)$$

であるから、(12)(13)の2本が u , x の動きを決定する。本文中の図はすべて u を横軸, x を縦軸にとっていることに注意しよう。

(12)と(13)の右辺を0とした場合がそれぞれ $\dot{u} = 0$, $\dot{x} = 0$ 線となる。 $\dot{x} = 0$ 線は、傾きが $1/b$ の右上がりの直線になる。(12)式から

$$\pi'(x) = (r+b)c'(u)$$

であり, $c'' > 0$, $\pi'' < 0$ なのでこの曲線は右下がりである。

$\dot{x} = 0$ よりも x の値が大きいと(13)の右辺は負になるので, この線の上側では $\dot{x} < 0$, 下側では $\dot{x} > 0$ 。 $\dot{u} = 0$ よりも x の値が大きいと(12)の右辺は正になるので, この線の上側では $\dot{u} > 0$, 正側では $\dot{u} < 0$ 。

つぎに, (12)(13)を均衡点 (u_s, x_s) の周りで線形化すると,

$$\dot{u} = (r+b)c''(u-u_s) - \pi''(x-x_s)$$

$$\dot{x} = (u-u_s) - b(x-x_s)$$

この係数行列を B とすると, 特性方程式は

$$\rho^2 - \{(r+b)c'' - b\}\rho - b(r+b)c'' + \pi'' = 0$$

判別式は

$$\{(r+b)c'' - b\}^2 + 4\{b(r+b)c'' - \pi''\}$$

これは $\pi'' < 0$ より正であるので, 特性根は実数である。また,

$$\det B = -b(r+b)c'' + \pi'' < 0$$

から2つの特性根は異符号。したがって均衡点は鞍点となる。

B クラックの可能性があるケース

現在価値 Hamiltonian H を

$$H \equiv [\pi(x) - c(u)](1 - F(x)) + \lambda(u - bx)$$

とすると, 最適化のための条件から,

$$\frac{dH}{du} = -c'(1 - F(x)) + \lambda = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= r\lambda - \frac{dH}{dx} \\ &= (r+b)\lambda - \pi'(1-F(x)) - F'(\pi(x) - c(u))\end{aligned}\tag{15}$$

(14)を時間微分し, (16)を考慮すると,

$$c''(1-F)\dot{u} - c'F'(u-bx) = (r+b)c'(1-F) - \pi'(1-F) + F'(\pi - c)$$

ここで

$$h \equiv \frac{F'}{1-F}$$

を定義し, 変形すると

$$c''\dot{u} = c'\{h(u-bx) + (r+b)\} - \pi' + h(\pi(x) - c(u))$$

を得る。

参 考 文 献

- Kamien, M. I. and N. L. Schwartz (1971, April). Optimal maintenance and sale age for a machine subject to failure. *MANAGEMENT SCIENCE* 17(8).
- Kamien, M. I. and N. L. Schwartz (1981). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. North Holland.
- Reinganum, J. F. (1989). The timing of innovation: Research, development, and diffusion. In R. Schmalensee and R. Willing (Eds.), *Handbook of Industrial Organization*, Volume I. Elsevier Science Publishers B. V.
- 安田俊一 (1996). 最適セキュリティ比率. 松山大学論集 8(3), 51-70.