

陰関数の定義及び陰関数定理に 関するネックの解明

石 川 忠 孝

1. は じ め に

高等学校で自明としてきた命題等を，自明でないとして掘り下げたりすると大学新入生はそのようなことを学ぶ必要性に疑問をもったりする。その1つに陰関数の微分法がある。高等学校では，微分可能な陰関数の存在を直観的に認めて，その微分法を取り扱ってきた。また，極めて容易に使いこなせる公式や定理のたぐいでも，本当の意味がよく分かっていないということが随分とある。そこで，陰関数の定義からはじめて陰関数の微分法の問題点を取り挙げて，その考察を行う。

2. 陰 関 数 の 定 義

テキストにより，陰関数の定義がいろいろな形で述べられている。その例を次に挙げる。

例1 方程式 $2x+3y+1=0$ から， x の関数としての y を考えることができる。一般に x, y の関係式 $f(x, y) = 0$ によって定められる x の関数 y を陰関数という。

例2 x の関数 y が $f(x, y) = 0$ という形の方程式によって定められるときには y は x の陰関数であるといい，これに対して y について解かれた形の方程式 $y = f(x)$ によって定められるときには y は x の陽関数であるという。

例3 一般に，2つの変数 x と y の間に方程式

$$(1) \quad F(x, y) = 0$$

があるとき、これを満たす点 $P(x, y)$ は平面上の曲線をえがく。このとき、 x の1つの値に対して y の値がただ1つ定まるとは限らないが、曲線のある部分について

$$(2) \quad y = f(x)$$

の形に表すことができるものとする。式(1)が与えられて、 y を x の関数と考えるとき、 y を x の陰関数といい、式(1)を陰関数表示という。これに対して式(2)の形で表される関数を陽関数ということがある。

例4 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ のように、変数 x と y との間に方程式 $f(x, y) = 0$ で与えられる関係があるとき、定義域および値域を適当に定めることにより y が x の関数とみられることがある。この関数を方程式 $f(x, y) = 0$ から定まる陰関数という。

例5 $x^2 + xy + y^2 - x - y = 0$ のように、独立変数と従属変数とが混ざりあった数式によって両者の関係が表現されている場合、その関数を陰関数という。

例6 方程式 $f(x, y) = 0$ は x を決めるごとに、 y を1つまたは複数個定める式とみなすことができる。 y が1つのときを $y = g(x)$ 、複数個のとき $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, \dots と表すとき、 $f(x, y) = 0$ は陰関数 $y = g(x)$ 、または陰関数 $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, \dots を定めるという。

以上のような定義を述べた直ぐ後に、つめにつめた「陰関数 $f(x, y) = 0 \dots$ 」と書いていたりして、陰関数という用語が学生を迷わしている。陰関数をすっきり理解することが難かしい。

x の無理関数

$$y = -\sqrt[3]{x^2} \tag{1}$$

を考える。(1)を変形すると

$$x^2 + y^3 = 0 \tag{2}$$

という式になる。(1)と(2)が同値であることは容易に分かる。したがって、(2)は x の関数を定めているといって差し支えない。(1), (2)が定める x の関数という

立場で(1)と(2)を比べると、(1)は $y = g(x)$ の形に表されているのに対して、(2)は $f(x, y) = 0$ の形になっている。

ところで、例1, 2やその他の本が書いているように「 $f(x, y) = 0$ で定められている関数を陰関数といい、これに対して、(1)のような形 $y = g(x)$ で表されている関数を陽関数という」と定義すると、困った問題が起こってくる。

例えば

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

を満たす x の関数 (x から y への対応) は

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{ と } y = -\sqrt{1-x^2}$$

が考えられる。

また、この2つばかりでなく

$$y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & (x \text{ が有理数のとき}) \\ -\sqrt{1-x^2} & (x \text{ が無理数のとき}) \end{cases} \quad (4)$$

も考えられる。いずれの場合も、その定義域は $[-1, 1]$ である。(4)で与えられる関数は(3)を満たすが $(-1, 1)$ で連続でもなければ、まして微分可能でもない。

(2)と(3)の違いは、(2)はそれと同値な陽関数(1)が存在しているが、(3)の場合はそのような関数がない。このようにいってはみたが、 $x \in [-1, 1]$ に対して $\sqrt{1-x^2}$ および $-\sqrt{1-x^2}$ を対応させる多価関数まで、考察の対象にすれば議論は若干変わってくる。しかし、微分積分学が対象とする関数は1価関数であって、多価関数は対象とならない。

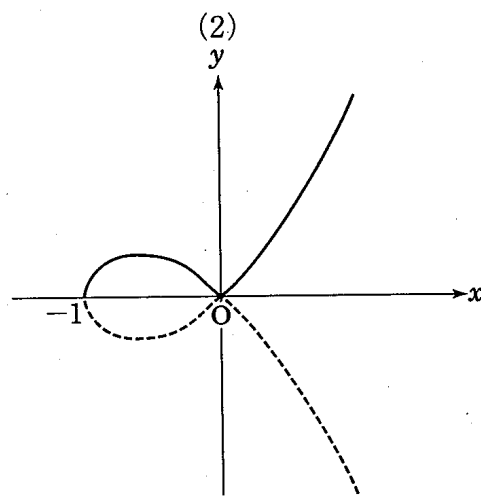
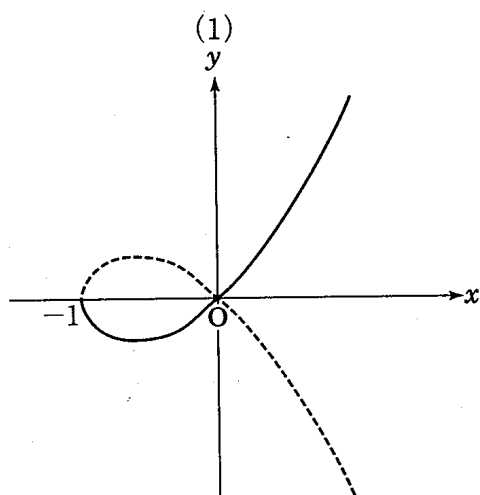
従来の微分積分入門のテキストでは、はじめのほうでの関数の定義で、多価関数が定義されているけれども、やがて関数の極限や微分係数が語られるところになると、多価関数では困ったことになるので、分枝などという常識的でない方をして、すべては1価関数に限定することになって、結局は、多価関数の微分積分は不問にされてしまっている。多価関数について定義を与えることは

その後の体系の展開のために理論的に必要であるからというわけではなくて、ただ昔からあったという、いわゆる伝習に従ったというにすぎないというほかはない。

高木貞治著の解析概論には、枝という用語を使用して次のように書いている。名著であることの歴史を示す1つといえよう。「二つの変数 x, y の間に関係式 $F(x, y) = 0$ が与えられるときは、 x と y とが各別に任意の値を取ることができない。もしも x の関数 $y = f(x)$ を y に代入するとき、上記の関係が或る区間において常に成り立つならば、 $f(x)$ は $F(x, y) = 0$ によって陰伏的に定められるという。もしもこのような関数 $f(x)$ が二つ以上あるならばそれらを陰伏関数の枝という。その場合、それらの枝を総括して y を x の多意関数（または多価関数）という。

簡単な一例として $x^2 + y^2 = a^2$ を取る。このとき $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ が区間 $[-a, a]$ における陰伏関数 y の二つの枝である。符号 \pm によって二つの枝を区別するのは連続性の要求に基づく（もしも連続性を要求しないならば、 x の各々の値に対して任意に符号をきめても、さしつかえないはずである）。

他の一例として $y^2 = x^2(x+1)$ を取る。然らば $y = \pm \sqrt{x^2(x+1)}$ であるが、今 $x > 0$ なるときは平方根の正の値、また $x < 0$ なるときは平方根の負の値を取ることにするならば、それは区間 $[-1, \infty]$ において滑らかな一つの枝である。もしも符号を反対にすれば、他の滑らかな一つの枝を得る（図(1)）。



もしも $y = \pm\sqrt{x^2(x+1)}$ において平方根を常に正、または常に負とするならば、 y は $x = 0$ において連続ではあるが、微分可能性を失うであろう (図(2))。

平方根は常に正の値を取るというようなことは安価な規約であるけれども、必ずしも幸福をもたらさない。」

ところで、(3)を

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \quad (5)$$

のように変形することはよくあるが、これはあくまでも

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{ または } y = -\sqrt{1-x^2}$$

を単純化した記法であるに過ぎない。 y が1つの数(この場合特定の数という意味ではない)を表す以上、異なる2つの数に等しいなどということとはありえない。定義によって関数は1価対応であるから、(5)のような書き方を多価である関数の方程式とみなすことは誤りである。

このように、不用意に(3)で表される x の陰関数というとき、上記のように困った現象が起こってくる。当然、このようなことが生じないように制限を設けなければならない。

(3)を満たす点 (a, b) ($b \neq 0$) を任意にとるとき、十分小さな正数 ε を選べば、 (a, b) の ε 近傍 U が点 $(1, 0)$ と点 $(-1, 0)$ を含まないようにできる (図-1)。(3)を満たす (x, y) を U 内に限定して考えると、そこでは x の値を定めると、(3)を満たす y の値が一意的に定まる。図-1の場合では $y = \sqrt{1-x^2}$ であり (a, b) の選び方によっては $y = -\sqrt{1-x^2}$ となることもある。いずれにせよ、 (a, b) の近傍 U では x の1つの値に対して(3)を満たす複数の y の値が対応することはない。(2)が(1)

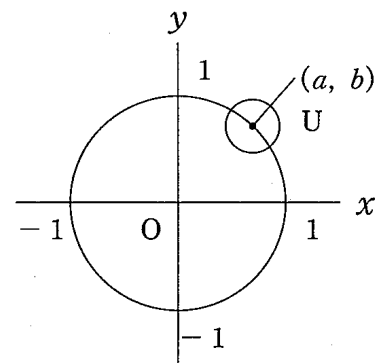


図-1

と同値であったように、このような近傍内で、上記のようにして定まる x の関数の連続性や微分可能性についても問題はない。ただし、 (a, b) として $(1, 0)$ と $(-1, 0)$ を選ぶと上のような考察はできない。 $(x$ から y への対応を考えて

いるが、 y から x への対応を考えれば、 $(1, 0)$ と $(-1, 0)$ を選んでも差し支えない。))

以上のことから次のような例を説明してから陰関数を定義すると分かり易い。また、陰関数定理の理解が容易になる。

例 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

とし、関係式 $f(x, y) = 0$ を考える。これは点 (x, y) が単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある条件である。

$$f_y(x, y) = 2y = 0$$

となる2点 $(1, 0)$ 、 $(-1, 0)$ においては接線が x 軸に垂直になっているが、円周上のそれ以外の点 (a, b) (ただし $b \neq 0$) の十分近くでは、円周はある関数 $y = g(x)$ のグラフとみなせる。

$$b > 0 \text{ のとき } y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$b < 0 \text{ のとき } y = g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

である。

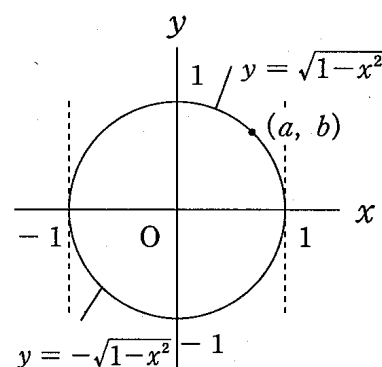


図-2

この例のように、一般に2つの変数 x, y の関係式 $f(x, y) = 0$ が与えられ、この式の定める曲線上の点 (a, b) の十分近くにおいて、この曲線がある関数 $y = g(x)$ のグラフとみなせるとき、すなわち、 a に近い各 x の値に対して、 $f(x, y) = 0$ をみたす y の値が1つに定まるとき、この関数 $y = g(x)$ を $f(x, y) = 0$ によって定まる陰関数という。

このように定義すると陰関数が明確になるだろう。

3. 陰関数定理と陰関数の微分法

高等学校では、微分可能な陰関数の存在を直観的に認めて、陰関数の微分法の公式として

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{や} \quad f_x(x, y) \frac{dx}{dy} + f_y(x, y) = 0$$

を用いてきた。しかし、この本当の理解がなくて形式的に公式を使用している

というのが実態である。

例題1 $x^2 + y^2 = 1$ のとき $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

解 $x^2 + y^2 = 1$

この両辺を x で微分すると

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

〈注1〉普通は上のように解答するが、 y を陽関数の形に書き表してから微分すると、次のようになる。

与えられた方程式を y について解くと

$$y \geq 0 \text{ のとき } y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y \leq 0 \text{ のとき } y = -\sqrt{1-x^2}$$

$y \geq 0$ のとき、 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ とおくと、 $f(x)$ は $-1 < x < 1$ で微分可能であって

$$x^2 + \{f(x)\}^2 = 1$$

が成り立つ。この両辺を x で微分すると

$$2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

$y = f(x)$ であるから $\therefore f'(x) = -\frac{x}{y}$

$y \leq 0$ のときは、 $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$ とおくと

$$x^2 + \{g(x)\}^2 = 1$$

これより全く同様に、 $g'(x) = -\frac{x}{y}$ が得られる。

〈注2〉上の解で両辺を x で微分するところの説明は次のようにすればよい。
たとえば方程式 $x^2 + y^2 = 2y$ は、 x に y を対応させる関数を定める。それを実際に求めると

$$f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}, \quad g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

$f(x)$ を y に代入すれば

$$\text{左辺} = x^2 + (1 - \sqrt{1-x^2})^2 = 2(1 - \sqrt{1-x^2}) = L(x)$$

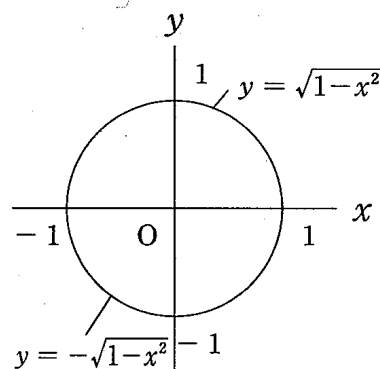


図-3

$$\text{右辺} = 2(1 - \sqrt{1 - x^2}) = R(x)$$

どちらも x の関数で、見かけは違うが等しい関数である。 $g(x)$ を代入しても同じことである。両辺が等しい関数ならば、その導関数も等しい。

$$L(x) = R(x) \longrightarrow \frac{d}{dx} L(x) = \frac{d}{dx} R(x)$$

そこで、両辺を x で微分するのである。

〈注3〉陰関数の微分法は、方程式が1つの変数について解けないとき、なくてはならない方法であるが、方程式が1つの変数に関して解ける場合でも計算を容易にする。

2変数の関数 $f(x, y)$ によって方程式

$$f(x, y) = 0 \tag{①}$$

が与えられたとする。

①を y について解いて

$$y = g(x)$$

の形にできるならば、これを①に代入して

$$f\{x, g(x)\} = 0$$

なる恒等式が成り立つから、この両辺を x で微分して

$$f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0$$

から $\frac{dy}{dx}$ が求められる。しかし、以上のことは無条件ではできない。

たとえば

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 0$$

の方程式では $x = 0$ のとき $y = 0$ であるが、 $x \neq 0$ のとき y の実数値は定められない。形式的に両辺を x で微分して

$$2x + y + (x + 2y) \frac{dy}{dx} = 0$$

から $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x + 2y}$ を得ても意味がない。次の定理によってその条件が明らかになる。

陰関数定理 関数 $f(x, y)$ およびその偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ が領域 D で連続で、 D の1点 (a, b) で $f(a, b) = 0$, $f_y(a, b) \neq 0$ ならば、 $x = a$ の近く

で次の性質をもつ1価連続関数 $y = g(x)$ がただ1つ定まる。

$$1) f\{x, g(x)\} = 0 \quad 2) b = g(a) \quad 3) \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

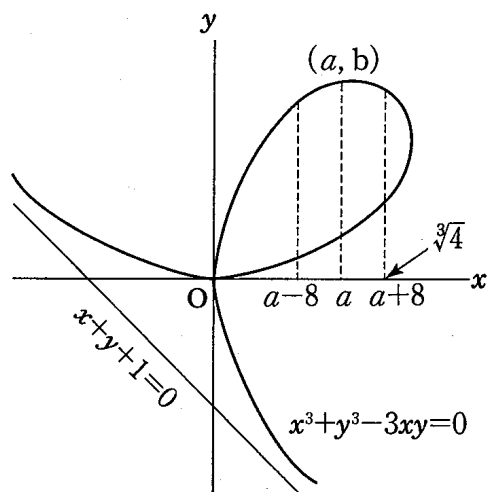


図-4

この定理の証明を行ったり，理論的に応用したりすることは文系はもちろん理系でも一般の学生にはまず必要ないであろう。むしろ応用上必要なのは導関数の公式であろう。テキストなども証明しないで，直ちに導関数を求める問題を扱っているのがほとんどである。定理の証明は難かしいから，一般の学生には省略するのもやむを得まい。しかし，定理の意味の理解を図るため

に次のような幾何学的な説明が必要である。

この定理の意味を $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ を例に採って幾何学的に説明してみると，「 $f(x, y) = 0$ によって定められる x の関数 y は複数個あるが，点 (a, b) を曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点とすると，点 (a, b) にごく近い曲線の一部を採って考えると，その上の点の y 座標は x の一価連続関数で

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} \text{ である}」$$

というのである。

テキストなどは，陰関数定理の導入後，すぐに導関数を求めている。初心者は定理の意味が十分に分かってなくて，形式的に導関数を求めている場合が多い。そこで導関数を求める問題を扱う前に，次の例題2，3，4を解くことによって，定理の意味の理解を深めたい。

例題2 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ とする。このとき，点 $(1, \sqrt{3})$ に対し $g(1) = \sqrt{3}$ によって定まる陰関数 $g(x)$ を求め，次の等号を示せ。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{3}) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{3}) \cdot g'(1) = 0$$

解 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ より

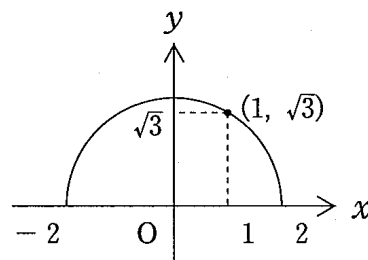


図-5

$$y = \pm \sqrt{4-x^2}$$

よって、点 $(1, \sqrt{3})$ の近傍での陰関数は

$$g(x) = \sqrt{4-x^2} \quad (-2 < x < 2)$$

したがって

$$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \text{ であるから}$$

$$g'(1) = \frac{-1}{\sqrt{4-1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

①

一方

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \text{ であるから}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{3}) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

②

①②より

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{3}) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{3}) \cdot g'(1) = 2 + 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

例題 3 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$ と

する。このとき、点 $(3, 3)$ の近傍で陰関数 $y = g(x)$ が存在することを示し、点 $x = 3$ における微分係数 $g'(3)$ を求めよ。

解 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ より

$$f_y = 3y^2 - 6x$$

したがって

$$f(3, 3) = 3^3 + 3^3 - 6 \cdot 3 \cdot 3 = 0$$

$$f_y(3, 3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 \neq 0 \quad \text{①}$$

よって、点 $(3, 3)$ の近傍で陰関数 $y = g(x)$ が存在する。

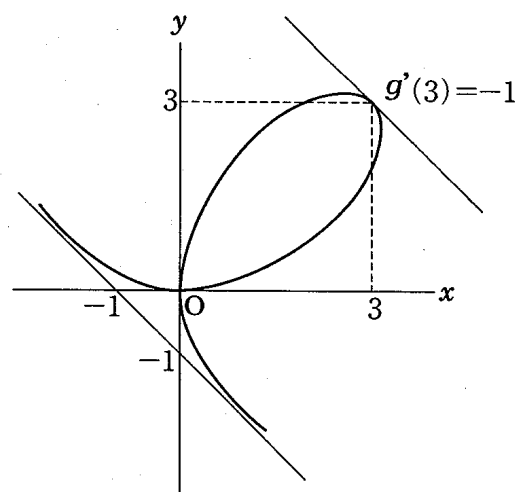
また、 $f_x = 3x^2 - 6y$ だから

$$f_x(3, 3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9$$

②

①②を $f_x(3, 3) + f_y(3, 3) \cdot g'(3) = 0$ に代入すると

$$9 + 9 \cdot g'(3) = 0$$



図—6

ゆえに、点 $x = 3$ における微分係数は

$$\therefore g'(3) = -1$$

例題 4 $f(x, y) = 0$ の点 P の近傍における陰関数の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

$$f(x, y) = \sin(x+y) - \sin xy - 1, P = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

解 $f_x = \cos(x+y) - y \cos xy$, $f_y = \cos(x+y) - x \cos xy$ であるから

$$f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 = 0 \quad \text{①}$$

$$f_y\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - 0 \cos 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{②}$$

よって、陰関数 $y = g(x)$ は存在しない。

$$f_x\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \cos 0 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \neq 0 \quad \text{③}$$

よって、①③より陰関数 $x = h(y)$ が存在する。

したがって、点 P における微分係数は

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{f_y\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{f_x\left(0, \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = 0$$

つまり、 $y = g(x)$ と考えたときには、点 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ で接線が y 軸に平行になっている。

〈注〉 このように陰関数 $y = g(x)$ と $x = h(y)$ の両方の存在を調べなければならない問題もあるから、陰関数定理の意味の十分な理解が必要である。なお、陰関数 $x = h(y)$ の存在が分かったからといって、具体的に $h(y)$ を y で表すことができるとは限らない。

この後で導関数を求める問題を扱えば、陰関数定理の意味が理解できているから、陰関数の微分法がよく分かり問題を解くことに興味も湧くだろう。

例題 5 $x^2 + xy + y^2 = 1$ から $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

解 1 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ とおくと

$$f_x = 2x + y, f_y = x + 2y, f_{xx} = 2, f_{xy} = 1, f_{yy} = 2$$

したがって、 $f_y = x+2y \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x+y}{x-2y} \\ \therefore \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3} \\ &= -\frac{2(2x+y)^2 - 2(2x+y)(x+2y) + 2(x+2y)^2}{(x+2y)^2} = -\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^2} = \frac{-6}{(x+2y)^2}\end{aligned}$$

解2 $x^2+xy+y^2=1$

y を x の関数と考えて、両辺を x で微分すると

$$2x+y+x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(2x+y)+(x+2y)\frac{dy}{dx}=0$$

したがって、 $x+2y \neq 0$ のとき

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y} \tag{①}$$

式①を x でさらに微分し、 $\frac{dy}{dx}$ には①を代入すると

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\left(2+\frac{dy}{dx}\right)(x+2y)-(2x+y)\left(1+2\frac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2} \\ &= -\frac{\left(2-\frac{2x+y}{x+2y}\right)(x+2y)-(2x+y)\left(1-2\cdot\frac{2x+y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2} \\ &= -\frac{2(x+2y)^2-(2x+y)(x+2y)^2-(2x+y)(x+2y)+2(2x+y)^2}{(x+2y)^2} \\ &= -\frac{6(x^2-xy+y^2)}{(x+2y)^2} = \frac{-6}{(x+2y)^2}\end{aligned}$$

$\frac{dy}{dx}$ が求められるためには、与えられた方程式から「 x について微分可能な関

数 $y = g(x)$ が得られる」ことが前提条件になっている。したがって、この確認が必要であり、そのための定理が陰関数定理である。普通テキストなどの解答

は上記の解1や解2のようであって、陰関数定理の条件が満たされる確認がなく、すなわち「 x について微分可能な関数 $y = g(x)$ が得られる」ことを確認なしに認めている。「陰関数定理を用いることなく、 y を x の関数とみて、直接 $f(x, y) = 0$ を微分することが多い」とか「この前提条件がみたされていることが明白な場合、あるいは、 x の適当な区間をとればこの条件はみたされるものと仮定して問題を取り扱う」などと述べて、微分可能な関数 $y = g(x)$ の存在を確認しないで導関数を求めているものもある。これでは、高校で陰関数定理を取り扱わずに微分可能な陰関数の存在を直観的に認めて、陰関数の微分の公式を用いて問題を解いているのと全く同じである。また、先に述べたような $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 0$ を形式的に両辺を微分して $2x + y + (x + 2y)\frac{dy}{dx} = 0$ から $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$ を得るような意味のないことを行う心配も起こる。「関数を微分せよ」という問題の場合、「可能な範囲で微分せよ」ということであって、通常は答えにいちいち微分可能な範囲を書くことはしないが、陰関数の微分の場合は与えられているのは関数でなくて、方程式 $f(x, y) = 0$ であり、その陰関数の存在が問題である。論理的に数学を理解することが最も大切なことである。解1や解2の解答を可とするためには、問題文を例えば「 $x^2 + xy + y^2 = 1$ の定める陰関数 $y = g(x)$ について、 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ」として、陰関数 $y = g(x)$ の存在を明示すべきであると考ええる。なお、 x について微分可能な関数 $y = g(x)$ が得られることを確認した解答は次のようになる。

解1' $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ とおくと

$$f_x = 2x + y, f_y = x + 2y, f_{xx} = 2, f_{xy} = 1, f_{yy} = 2$$

連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

の解は $(x, y) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ だから、この2点以外で $f_y = x + 2y \neq 0$ したがって、この2点以外の点の近傍で微分可能な連続関数が存在する。

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x+y}{x+2y} \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2} \text{ は略}\right)$$

解2' $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ とおくと $f_y = x + 2y$

連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

の解は $(x, y) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ だから、この2点以外で $f_y = x + 2y \neq 0$ したがって、この2点以外の点の近傍で微分可能な連続関数が存在する。

したがって、与式において y を x の関数と考えて、両辺を x で微分すると

$$2x + y + x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2x + y) + (x + 2y) \frac{dy}{dx} = 0$$

よって、 $x + 2y \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y} \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2} \text{ は略}\right)$$

<注1> 陰関数定理にのっとって詳細に述べると次のようになる。

解1'' $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ とおくと

$$f_x = 2x + y, f_y = x + 2y, f_{xx} = 2, f_{xy} = 1, f_{yy} = 2$$

連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

の解は $(x, y) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2点 $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ が曲線 $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ の分点になっている。 y の実数条件は $|x| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

いま、点 $(0, 1)$ で $f(0, 1) = 0, f_y(0, 1) = 2 \neq 0$ だから点 $(0, 1)$ の近傍で連続関数 $y = g_1(x)$ が定まり、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

点 $(0, -1)$ で $f(0, -1) = 0, f_y(0, -1) = -2 \neq 0$ だから点 $(0, -1)$ の近傍で連続関数 $y = g_2(x)$ が定まり、 $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x+y}{x+2y}$

$$\text{ゆえに } \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y} \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2} \text{ は略}\right)$$

解 2'' $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ とおくと $f_y = x + 2y$

連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

の解は $(x, y) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2点 $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ が曲線 $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ の分点になっている。 y の実数条件は $|x| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

いま、点 $(0, 1)$ で $f(0, 1) = 0, f_y(0, 1) = 2 \neq 0$ だから点 $(0, 1)$ の近傍で連続関数 $y = g_1(x)$ が定まる。

したがって、与式において y を x の関数と考えて、両辺を x で微分すると

$$2x + y + x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2x+y)+(x+2y)\frac{dy}{dx}=0$$

よって $x+2y \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

点 $(0, -1)$ で $f(0, -1) = 0$, $f_y(0, -1) = -2 \neq 0$ だから点 $(0, -1)$ の近傍で連続関数 $y = g_2(x)$ が定まる。したがって、同様にして

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

ゆえに $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$ $\left(\frac{d^2y}{dx^2} \text{ は略}\right)$

〈注2〉 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$

$= 0$ を y について解くと

点 $(0, 1)$ を通る連続関数は

$$y = \frac{-x + \sqrt{4-3x^2}}{2},$$

$$|x| < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

点 $(0, -1)$ を通る連続関数は

$$y = \frac{-x - \sqrt{4-3x^2}}{2}, \quad |x| < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

点 $\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ では $f_y\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$ となるが $f_x\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm \sqrt{3} \neq 0$ であるから, x について解けば同様に連続関数が得られる。

点 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を通る連続関数は

$$x = \frac{-y + \sqrt{4-3y^2}}{2}, \quad |y| < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

点 $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を通る連続関数は

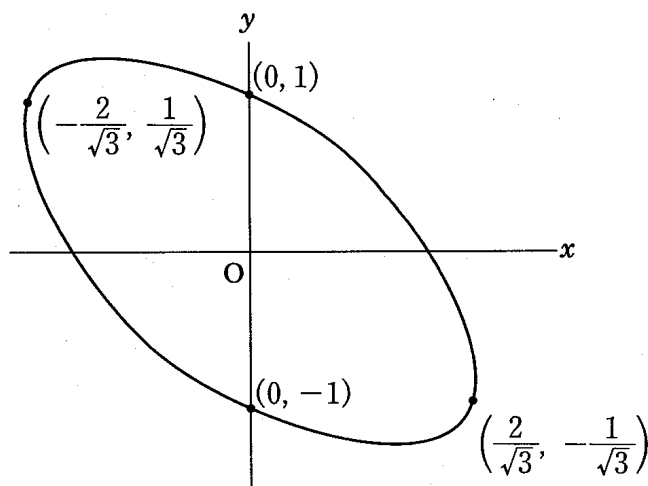


図-7

$$x = \frac{-y - \sqrt{4 - 3y^2}}{2}, |y| < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

〈注3〉 $\frac{d^2y}{dx^2}$ は $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$ の式を x の関数とみて微分すればよいのであるが、そのときに、 y が x の関数であることに注意し、 $\frac{dy}{dx}$ については、上の公式から代入する。これはテキストなどにのっているがめんどろである。次の方法のほうがよい。

$f(x, y) = 0$ の両辺を x で微分すると $f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0$ であるから、更に両辺を x で微分して

$$f_{xx} + f_{xy} \frac{dy}{dx} + f_{yx} \frac{dy}{dx} + f_{yy} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + f_y \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

これを見ると、 $\frac{d^2y}{dx^2}$ は1箇所しか現れず、しかもこれに関して1次式であるから $\frac{dy}{dx}$ を公式より代入すれば $\frac{d^2y}{dx^2}$ が求められる。この方法は、解法の方針だけを憶えておけばよいから楽である。したがって、 $\frac{d^2y}{dx^2}$ の公式を記憶している必要がない。

例題6 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ のとき、 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

解1 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ とおく

$$f_x = 3x^2 - 3y, f_y = 3y^2 - 3x, f_{xx} = 6x, f_{xy} = -3, f_{yy} = 6y$$

したがって、 $f_y = 3y^2 - 3x \neq 0$ のとき

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

$$= -\frac{6x(3y^2 - 3x)^2 - 2(-3)(3x^2 - 3y)(3y^2 - 3x) + 6y(3x^2 - 3y)^2}{(3y^2 - 3x)^3}$$

$$\begin{aligned}
&= (-2) \cdot \frac{x(y^2-x)^2 + (x^2-y)(y-x) + y(x^2-y)^2}{(y^2-x)^3} \\
&= (-2) \cdot \frac{y(y^4-3x^2y+xy^2+x)}{(y^2-x)^3} \\
&= (-2) \cdot \frac{xy(y^3-3xy+y^2)+xy}{(y^2-x)^3} \\
&= (-2) \cdot \frac{xy \times 0 + xy}{(y^2-x)^3} = \frac{-2xy}{(y^2-x)^3}
\end{aligned}$$

解2 $x^3+y^3-3xy=0$

y を x の関数と考えて、両辺を x で微分すると

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3y-3x\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3x^2-3y)+(3y^2-3x)\frac{dy}{dx}=0$$

したがって、 $3y^2-3x \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x^2}{y^2-x}$$

①

式①を x で更に微分し、 $\frac{dy}{dx}$ には式①を代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\left(\frac{dy}{dx}-2x\right)(y^2-x)-(y-x^2)\left(2y\frac{dy}{dx}-1\right)}{(y^2-x)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{y-x^2}{y^2-x}-2x\right)(y^2-x)-(y-x^2)\left(2y\cdot\frac{y-x^2}{y^2-x}-1\right)}{(y^2-x)^2} \\
&= \frac{(y-2xy^2+x^2)(y^2-x)-(y-x^2)(y^2-2x^3y+x)}{(y^2-x)^3} \\
&= \frac{-2xy^4+6x^2y^2-2x^4y-2xy}{(y^2-x)^3} = \frac{-2xy(y^3-3xy+x^3)-2xy}{(y^2-x)^3} \\
&= \frac{-2xy}{(y^2-x)^3}
\end{aligned}$$

x について微分可能な関数 $y = g(x)$ が得られることを確認した解答は次の

ようになる。

解1' $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ とおくと

$$f_x = 3x^2 - 3y, f_y = 3y^2 - 3x, f_{xx} = 6x, f_{xy} = -3, f_{yx} = 6y$$

連立方程式

$$\begin{cases} x^3 - 3xy + y^3 = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

の解は $(x, y) = (0, 0), (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ だから、この2点以外で $f_y = 3y^2 - 3x \neq 0$ したがって、この2点以外の点の近傍で微分可能な連続関数が存在する。

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = \frac{y - x^2}{y^2 - x} \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2} \text{ は略}\right)$$

解2' $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ とおくと $f_y = 3y^2 - 3x$

連立方程式

$$\begin{cases} x^3 - 3xy + y^3 = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

の解は $(x, y) = (0, 0), (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ だから、この2点以外で $f_y = 3y^2 - 3x \neq 0$ したがって、この2点以外の点の近傍で微分可能な連続関数が存在する。

よって、与式において y を x の関数と考えて、両辺を x で微分すると

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3y - 3x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3x^2 - 3y) + (3y^2 - 3x) \frac{dy}{dx} = 0$$

したがって、 $3y^2 - 3x \neq 0$ のとき

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x} \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2} \text{ は略}\right)$$

<注1> 2点 $(0, 0), (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ 以外の曲線上の点 (a, b) をとって、 $f(a, b) = 0$, $f_y(a, b) \neq 0$ をいうためには、 b の値を計算するのが大変めんどうである(注3参照)。したがって、この方法は避けるほうがよい場合がある。

<注2> $f_x(x, y) = 3x^2 - 3y$ であるから

$$f_x(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}) = 3(\sqrt[3]{4})^2 - 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} \neq 0$$

したがって、点 $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ の近傍では連続関数 $x = h(y)$ が存在する。しかし、 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ であるから、原点の近傍では陰関数定理が全く適用されない。原点は特異点である。

$$\langle \text{注 3} \rangle \quad y^3 - 3xy + x^3 = 0 \quad \text{①}$$

$$p = -3x, \quad q = x^3 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \text{判別式 } D &= -(2^2 p^3 + 3^3 q^2) = -\{2^2(-3x)^3 + 3^3(x^3)^2\} = 108x^3 - 27x^6 \\ &= -27x^3(x^3 - 4) \end{aligned}$$

3 次方程式①の根を判別すると

$$D > 0 \text{ すなわち } -27x^3(x^3 - 4) > 0 \quad \therefore 0 < x < \sqrt[3]{4} \text{ のとき相異なる 3 実根}$$

$$D = 0 \text{ すなわち } -27x^3(x^3 - 4) = 0 \quad \therefore x = 0, \sqrt[3]{4}$$

$$x = 0 \text{ のとき } p = q = 0 \text{ だから実根の 3 重根 (すなわち 0)}$$

$$x = \sqrt[3]{4} \text{ のとき } q \neq 0 \text{ だから実根の 2 重根と単根}$$

$$D < 0 \text{ すなわち } -27x^3(x^3 - 4) < 0 \quad \therefore x < 0, \sqrt[3]{4} < x \text{ のとき 1 実根と 1 組の共役虚根}$$

カルダノの公式を用いて 3 次方程式①を解くと

$$0 < x < \sqrt[3]{4} \text{ のとき次の 3 実根をもつ。}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}}$$

$$y^2 = \omega \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}}$$

$$y^3 = \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}}$$

$$x = 0 \text{ のとき, } y = 0 \text{ (3 重根)}$$

$$x = \sqrt[3]{4} \text{ のとき, } y = 2\sqrt[3]{-2}, \sqrt[3]{2} \text{ (重根)}$$

$$x < 0, \sqrt[3]{4} < x \text{ のとき実根は}$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}}$$

したがって、連続関数 $y = g(x)$ は次のように定まる。

$-\infty < x < 0$ では1つ

$$y = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}}$$

$0 < x < \sqrt[3]{4}$ では3つ

$$y = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}}$$

$$y = \omega \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}}$$

$$y = \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}}$$

$\sqrt[3]{4} < x < \infty$ では1つ

$$y = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}}$$

4. ま と め

テキストなどは、陰関数の定義をきっちり述べておきながら、その後で「陰関数 $f(x, y) = 0 \cdots \cdots$ 」などと書いている場合がある。つめにつめた簡潔な表現であるが初心者は混乱する。これは「陰関数表示 $f(x, y) = 0 \cdots \cdots$ 」と表現すれば迷わないであろう。とにかく、陰関数の定義をまず確実なものにすることである。

次に陰関数定理は文系はもちろん理系でも一般の学生は証明が必要でない。幾何的な説明を行い、また例題2, 3, 4のような問題を解かせて、定理の意味を十分に理解させることが大切である。すなわち、一般の学生に大切なのは陰関数定理の意味が分かって正確に導関数が求められるようになることである。形式的に計算して導関数を求めるだけを要求する問題ならば問題文を

「 $f(x, y) = 0$ の定める陰関数 $y = g(x)$ について、 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ」と陰関数 $y = g(x)$ の存在を明示しておくといふ。そうでない問題は原則として微分可能な連続関数 $y = g(x)$ が存在することを確認してから導関数を求めねばならない。

参 考 文 献

- 1) 有馬哲・石村貞夫共著「よくわかる微分積分」東京図書, 1994年, p 200～p 208
- 2) 日野義之・石村隆一・久我健一共著「基礎からの微分積分」培風館, 1997年, p 98～p 100
- 3) 稲葉三男著「関数定義」共立出版, 昭和52年, p 8～p 12
- 4) 井上正男・小堀憲・佐藤三郎・柴垣和三雄・高橋進一・戸田清共著「微分積分学」学術出版, 昭和30年, p 189～p 193
- 5) 岩切晴二著「微分積分学精説改訂版」培風館, 1991年, p 298～p 302
- 6) 梶原毅著「微積分学周遊」現代数学社, 1992年, p 88～p 94
- 7) 御園生善尚著「大学新入生のための数学」現代数学社, 1988年, p 72～p 81
- 8) 永田幸令・三好武雄共著「プラクティカル基礎数学」開成出版, 1997年, p 122～p 125
- 9) 佐藤恒雄・吉田英信・野澤宗平・宮本育子共著「初歩から学べる微積分学」培風館, 1999年, p 191～p 196
- 10) 立花俊一・成田清正共著「エクササイズ偏微分・重積分」共立出版, 1997年, p 39～p 47
- 11) 田河生長・岡部章・斎藤斉・高遠節夫・山本茂樹共著「微分積分II」大日本図書, 1998年, p 54～p 57
- 12) 高木貞治著「解析概論改訂第三版」岩波書店, 1974年, p 294～p 297, p 311～p 315
- 13) 高橋正明著「微分」科学新興社, 1978年, p 59
- 14) 田代嘉宏・難波完爾共編「新編高専の数学3」森北出版, 1994年, p 93～p 97