二項分布の平均と分散の求め方の指導について

石　川　忠　孝

1.　は　じ　め　に

二項分布は，高等学校では「数学B」の「確率分布」で取り扱われることになっている。「数学B」は「数学Ⅰ」を履修した後に選択して履修させる科目の一つであって，標準単位は2単位である。

「数学B」の内容は，(1)　ベクトル　(2)　複素数と複素平面　(3)　確率分布　(4)　算法とコンピュータで構成されており，標準単位数の2単位で履修させる場合，これらの中から二つの内容を適宜選択して取り扱うのが一般的である。理系でも，ほとんどの大学は数学Bの確率分布は入試の出題範囲から外している。したがって，確率分布を学習する生徒は極めて少なくなっている。

二項分布は離散型分布の中で，統計理論にもっともよく使われている非常に重要な確率分布である。数学Bでは，二項分布は基本的でしかも有用な確率分布の例として取り扱われていて，二項分布に従う確率分布 X の平均，標準偏差分散について扱われている。

そこで，数学Bの教科書における二項分布の平均と分散の求め方の取り扱い状況を調査研究し，大学の共通教育における統計学での二項分布の平均と分散の求め方のよりよい指導について研究する。

なお，本稿では数学Bの教科書のすべて（11社21種類）を参考にした。

2.　教科書における取り扱い方

前々回の学習指導要領では，数学Ⅲに確率分布や統計的な推測の内容が組み

込まれていたが，数学IIIの教科書での二項分布の平均と分散の求め方の取り扱い状況は表—1の通りである。圧倒的に微分法を利用したものが多かった。これは，数学IIIの微分法と積分法を学習してから，最後に統計を学習する構成になっていたためである。

現在の数学Bの教科書での取り扱い状況は表—2の通りである。$B(3, p)$ または $B(4, p)$ の特定の一つの二項分布の平均と分散を求めた後，公式を列挙しているものが多く，数理的な類推によるものはない。また，確率変数の和の性質を利用しているものが多く，二項定理を利用したものはない。中には分散を取り扱ってないものや証明なしに公式を列挙したものなどもある。多様化している生徒に適応するように，十分な配慮がなされた創意工夫がうかがわれる。

表—1

項　　目	教科書数
微分法の利用	15冊
二項定理の利用	4
確率変数の和の性質の利用	1
$B(3, p)$ の平均と分散を求めて一般化	1

表—2

項　　目	平　均	分　散（標準偏差）
$B(n, p)$ に確率変数の和の性質を利用	7冊	7冊
$B(3, p)$ または $B(4, p)$ の平均と分散を求めて一般化	7	4
$B(3, p)$ または $B(4, p)$ に確率変数の和の性質を用いて平均と分散を求めて一般化	5	5
証明なしに公式列挙	2	1

3.　大学入試における取り扱い方

現学習指導要領の2年目の入試である平成10年の国公立2次試験及び私立大の数学Bの出題率と数学B内での各内容の出題率は表—3の通りである。数学Bの出題率は理系17.0%，文系22.7%と低い上に，確率分布となると文系，理系とも数学B内での出題率は10%を割っている。確率分布の出題内容は，学習指導要領の小項目「ア　確率の計算」がほとんどであって，「イ　確率分布」

は非常に少ない。

表―3

	理系			文系		
	国公立	私立	合計	国公立	私立	合計
数学B	16.2%	18.1	17.0	18.3	28.1	22.7
ベクトル	53.5	45.4	49.8	51.6	47.1	49.1
複素数と複素平面	34.2	50.5	41.7	43.2	33.0	37.6
確率分布	12.3	4.1	8.5	3.9	14.7	9.8
算法とコンピュータ				1.3	5.2	3.5

二項分布についての出題は，平成9年，平成10年の両年ともわずかに2校ずつで，極めて少ない。出題された問題は下記の通りである。

○　平成9年

九州大学

n 個の袋があり，それぞれの袋には金色のカード3枚と銀色のカード $(3n-3)$ 枚入っている。それぞれの袋から1枚ずつカードを抜き出すとき，確率変数 X_n を抜き出された金色のカードの枚数とおく。

(1)　X_4 が値3をとる確率 $P(X_4=3)$，および値2をとる確率 $P(X_4=2)$ を求めよ。

(2)　金色のカードを1枚抜き出すごとに賞金100円を受け取る。$n=4$ のときに受け取る賞金の期待値を求めよ。

(3)　一般の $n\,(n\geqq 3)$ について，X_n が値3をとる確率 $P(X_n=3)$ を求めよ。

(4)　$\lim_{n\to\infty}P(X_n=3)$を求めよ。

岩手大学

2枚の硬貨を同時に投げて，2枚のうち少なくとも1枚表がでたら1点，2枚とも裏がでたら－1点とし，k 回投げたときの点数の合計を X_k とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　X_7 のとりうる値の集合を求めよ。

(2)　X_3 が3であり，かつ，X_7 が3以上である確率を求めよ。

(3)　X_7 の平均を求めよ。

○　平成10年

鹿児島大学

赤球 r 個，青球 b 個，白玉 w 個合わせて100個入った袋がある。この袋から無作為に1個の玉を取り出し，色を調べてから元に戻す操作を n 回操り返す。このとき，赤玉を取り出した回数を X とする。また，n 回の操作で n 回目に初めて青玉が出たとき，それまでに赤玉を取り出した回数を Y とする。このとき次の問に答えよ。

(1)　X の平均と標準偏差を n, r を用いて表せ。

(2)　X の平均が $\frac{16}{5}$，標準偏差が $\frac{8}{5}$ であるとき，袋の中の赤球の個数 r および回数 n を求めよ。

(3)　r, n は(2)で求めた値であり，Y の平均が $\frac{15}{4}$ であるとき，袋の中の青玉の個数 b を求めよ。

東京慈恵会医科大学

Aの箱には赤球が2個，白球が1個，Bの箱には赤球が2個，白球が3個入っている。一枚の銅貨を投げて表が出ればAの箱から，裏が出ればBの箱から球を一つとり出す，という試行を考える。

一回の試行で赤球の出る確率は $\boxed{}$ である。五回の独立試行で赤球の出る回数を値にとる確率変数を X とするとき，X の平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を既約分数で表せば，$E(X)=\boxed{}$，$V(X)=\boxed{}$ である。

4.　二項分布の平均と分散の求め方

(1)　類推による方法

○ $n=1$ の二項分布は

r	0	1
$P(X=r)$	q	p

0，1に対する確率は

$$(q+p)^1 = q+p$$

の各項よりなる。この分布の平均と分散は

$$E(X) = 0\times q+1\times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2\times q+1^2\times p = p$$

$$V(X) = E(X^2)-\{E(X)\}^2 = p-p^2 = pq$$

○ $n=2$ の二項分布は

r	0	1	2
$P(X=r)$	q^2	$2pq$	p^2

0，1，2に対する確率は

$$(q+p)^2 = q^2+2pq+p^2$$

の各項よりなる。この分布の平均と分散は

$$E(X) = 0\times q^2+1\times 2pq+2p^2 = 2p(p+q) = 2p \quad (\because q+p=1)$$

$$E(X^2) = 0^2\times q^2+1^2\times 2pq+2^2\times p^2 = 2pq+4p^2$$

$$V(X) = E(X^2)-\{E(X)\}^2 = 2pq+4p^2-(2p)^2 = 2pq$$

○ $n=3$ の二項分布は

r	0	1	2	3
$P(X=r)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

0，1，2，3に対する確率は

$$(q+p)^3 = q^3+3q^2p+3qp^2+p^3$$

の各項よりなる。この分布の平均と分散は

$$E(X) = 0\times q^3+1\times 3pq^2+2\times 3p^2q+3\times p^3$$

$$= 3p(q^2+2pq+p^2) = 3p(q+p)^2 = 3p$$

$$E(X^2) = 0^2\times q^3+1^2\times 3pq^2+2^2\times 3p^2q+3^2\times p^3 = 3pq^2+12p^2q+9p^3$$

$$V(X) = E(X^2)-\{E(X)\}^2 = 3pq^2+12p^2q+9p^3-(3p)^2$$

$$= 3p(q^2+4pq+3p^2-3p) = 3p\{q(q+p)+3p(q+p)-3p\}$$

$$= 3p(q+3p-3p) = 3pq$$

すなわち

$n=1$ のとき　$E(X)=p$　$V(X)=pq$

$n=2$ のとき　$E(X)=2p$　$V(X)=2pq$

$n=3$ のとき　$E(X)=3p$　$V(X)=3pq$

これから，一般の n の場合は類推により

$$E(X)=np \quad V(X)=npq$$

〈注〉完全な求め方にはなっていないが，高校では上記のように確かめる程度のものもあってよいであろう。計算が簡単なことに加えて，二項分布に対する理解を容易にしている一面もある。

(2) 確率変数の和の性質を用いる方面

ある試行で事象Aの起こる確率を p とする。この試行を n 回行う独立試行において，第 k 回目の試行で A が起これば1，起こらなければ0の値をとる確率変数を X_k とする。ただし，$1 \leqq k \leqq n$ である。

このとき

$$P(X_k=1)=p,\ P(X_k=0)=q,$$

$q=1-p$

r	1	0	計
$P(X_k=r)$	p	q	1

ゆえに

$$E(X_k)=1\times p+0\times q=p$$

$$E(X_k^2)=1^2\times p+0^2\times q=p$$

$$V(X_k)=E(X_k^2)-\{E(X_k)\}^2=p-p^2=p(1-p)=pq$$

いま，確率変数 X を

$$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$$

とすると，X は n 回の試行のうちAが起こる回数を示すから，二項分布 $B(n, p)$ に従う。

したがって

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)$$

$$= p+p+\cdots\cdots+p = np$$

また，X_1, X_2, ……, X_n は互いに独立な確率変数であるから

$$V(X) = V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)$$
$$= pq+pq+\cdots\cdots+pq = npq$$

〈注〉この方法を採用している教科書は多いが，生徒によってはやや難解ではないかと思う。

(3)　二項定理を用いる方法

ア　一般の二項分布から直接計算による方法

$$E(X) = 0\cdot{}_nC_0p^0q^n+1\cdot{}_nC_1pq^{n-1}+\cdots\cdots+r\cdot{}_nC_rp^rq^{n-r}+\cdots\cdots+n\cdot{}_nC_np^nq^0$$

$$= 1\cdot\frac{n!}{1!(n-1)!}pq^{n-1}+\cdots\cdots+r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}p^rq^{n-1}+$$

$$\cdots\cdots+n\cdot\frac{n!}{n!0!}p^nq^0$$

$$= np\frac{(n-1)!}{(n-1)!}q^{n-1}+\cdots\cdots+np\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}p^{r-1}q^{n-r}+$$

$$\cdots\cdots+np\frac{(n-1)!}{(n-1)!}p^{n-1}$$

$$= np\left\{\frac{(n-1)!}{0!(n-1)!}p^0q^{n-1}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}p^{r-1}q^{n-r}+\right.$$

$$\left.\cdots\cdots+\frac{(n-1)!}{(n-1)!0!}p^{n-1}q^0\right\}$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np(1)^{n-1} = np$$

$$E[X(X-1)] = 2\cdot1{}_nC_2p^2q^{n-2}+\cdots\cdots+r(r-1){}_nC_rp^rq^{n-r}+$$

$$\cdots\cdots+n(n-1){}_nC_np^nq^0$$

$$= 2\cdot1\frac{n(n-1)}{2\cdot1}p^2q^{n-2}+$$

$$\cdots\cdots+r(r-1)\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots1}p^rq^{n-r}+$$

$$\cdots\cdots+n(n-1)p^n$$

$$= n(n-1)p^2\{q^{n-2}+\cdots\cdots+\frac{(n-2)\cdots(n-r+1)}{(r-2)\cdots1}p^{r-2}q^{n-r}$$

$$+\cdots\cdots+p^{n-2}\}$$

$$=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}$$

$$= n(n-1)p^2$$

$$E[X(X-1)] = E(X^2-X) = E(X^2)-E(X)$$

$$V(X) = E(X^2)-\{E(X)\}^2 = E[X(X-1)]+E(X)-\{E(X)\}^2$$

$$= n(n-1)p^2+np-n^2p^2 = n^2p^2-np^2+np-n^2p^2$$

$$= np(1-p) = npq$$

〈注〉計算はだいぶめんどうであり，技巧的である。Σ記号を用いればもう少しスマートに表現できる。

イ Σ記号を利用する方法

$$\sum_{x=0}^{n} x\cdot p(x) = \sum_{x=0}^{n} x{}_nC_x p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}p^x q^{n-x}$$

$$= np\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{(x-1)!}p^{x-1}q^{n-x}$$

$$= np\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots((n-1)-(k-1))}{k!}p^k q^{n-1-k}$$

$$= np\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}C_k p^k q^{n-1-k}$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1){}_nC_x p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{(x-2)!}p^x q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\frac{(n-2)\cdots(n-x+1)}{(x-2)!}p^{x-2}q^{n-2-(x-2)}$$

$$= n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)\cdots(n-k-1)}{k!}p^k q^{n-2-k}$$

$$= n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}{}_{n-2}C_k p^k q^{n-2-k} = n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}$$

$$= n(n-1)p^2$$

$$V(X) = E(X^2)-\{E(X)\}^2 = E[X(X-1)]+E(X)-\{E(X)\}^2$$

$$= n(n-1)p^2+np-(np)^2 = n^2p^2-np^2+np-n^2p^2 = np(1-p)$$

$$= npq$$

〈注〉技巧が必要であり，計算がめんどうである。また Σ 記号に不慣れな者は，かえって分かりづらい。

ウ　偏微分法を利用する方法

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\,{}_nC_x p^x q^{n-x}$$

ところで

$$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x}$$

の両辺を p について偏微分すると

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x x p^{x-1} q^{n-x}$$

この両辺に p を掛けると

$$np(p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n} x\,{}_nC_x p^x q^{n-x} \qquad ①$$

$p+q=1$ を代入すると

$np = \sum_{x=0}^{n} x\,{}_nC_x p^x q^{n-x}$ であるから

$$E(X) = np$$

次に $E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2\,{}_nC_x p^x q^{n-x}$

①の両辺を p について偏微分すると

$$n(p+q)^{n-1}+n(n-1)p(p+q)^{n-2} = \sum_{x=0}^{n} x\,{}_nC_x x p^{x-1} q^{n-x}$$

この両辺に p を掛けると

$$np(p+q)^{n-1}+n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}=\sum_{x=0}^{n}x^2{}_nC_xp^xq^{n-x}$$

$p+q=1$ を代入すると

$$np+n(n-1)p^2=\sum_{x=0}^{n}x^2{}_nC_xp^xq^{n-x}$$ であるから

$$E(X^2)=np+n(n-1)p^2$$

$E(X)=np$ だから

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\{np+n(n-1)p^2\}-(np)^2=np(1-p)$$
$$=npq$$

〈注〉偏微分法を用いれば，技巧を用いなくても簡単に求められる。

(4)　確率母関数を用いる方法

二項分布 $B(n,\ p)$ の確率母関数は

$$G(t)=E(t^r)=\sum_{r=0}^{n}t^r{}_nC_rp^rq^{n-r}=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r(pt)^rq^{n-r}=(pt+q)^n$$

よって，$P_r={}_nC_rp^rq^{n-r}$ とおくと

$$(pt+q)^n=\sum_{r=0}^{n}P_rt^r \qquad ①$$

①の両辺を t について微分すると

$$n(pt+q)^{n-1}p=\sum_{r=1}^{n}rP_rt^{r-1} \qquad ②$$

$t=1$ とおくと $p+q=1$ であるから

$$\sum_{r=1}^{n}rP_r=np \quad \text{すなわち} \quad \sum_{r=0}^{n}rP_r=np \qquad ③$$

よって，$E(X)=\sum_{r=0}^{n}rP_r=np$

また，②の両辺を t について微分すると

$$n(n-1)(pt+q)^{n-2}p^2=\sum_{r=2}^{n}r(r-1)P_rt^{r-2}$$

$t=1$ とおくと $p+q=1$ であるから

$$\sum_{r=2}^{n} r(r-1)P_r = n(n-1)p^2$$

すなわち

$$\sum_{r=0}^{n} r(r-1)P_r = n(n-1)p^2 \qquad ④$$

よって③と④から

$$E(X^2) = \sum_{r=0}^{n} r^2 P_r = \sum_{r=0}^{n} r(r-1)P_r + \sum_{r=0}^{n} rP_r = n(n-1)p^2 + np$$

したがって

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq$$

〈注〉合成関数の微分法を使用するから，数学IIIの履修が必要である。

(5) 積率母関数を用いる方法

ア　定義による方法

二項分布 $B(n,\ p)$ の積率母関数は

$$M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}{}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x (pe^t)^n (1-p)^{n-x}$$

$$= (1-p+pe^t)^n$$

これを t についてベキ展開すると

$$M(t) = (1-p+pe^t)^n = \{1-p+p(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots\cdots)\}^n$$

$$= \{1+pt+\frac{1}{2!}pt^2+\frac{1}{3!}pt^3+\cdots\cdots\}^n$$

$$= 1+\frac{n!}{(n-1)!1!0!\cdots0!}pt+\left\{\frac{n!}{(n-2)!2!0!\cdots0!}(pt)^2\right.$$

$$\left.+\frac{n!}{(n-1)!0!1!0!\cdots0!}\frac{1}{2!}pt^2\right\}+\left\{\frac{n!}{(n-3)!3!0!\cdots0!}(pt)^3\right.$$

$$\left.+\frac{n!}{(n-2)!1!1!0!\cdots0!}pt\cdot\frac{1}{2!}pt^2+\frac{n!}{(n-1)!0!1!0!\cdots0!}\frac{1}{3!}pt^3\right\}+\cdots\cdots$$

$$= 1+npt+\frac{n(n-1)p^2+np}{2!}t^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)p^3+3n(n-1)p^2+np}{3!}t^3+\cdots\cdots$$

一方

$$M(t)=E(e^{tx})=E(1+tx+\frac{(tx)^2}{2!}+\frac{(tx)^3}{3!}+\cdots\cdots)$$

$$=1+E(x)\cdot t+\frac{E(x^2)}{2!}\cdot t^2+\frac{E(x^3)}{3!}\cdot t^3+\cdots\cdots$$

両者を比較して

$$E(x)=np$$

$$E(x^2)=n(n-1)p^2+np$$

よって

$$E(X)=np$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p)=npq$$

〈注〉 e^t や e^{tx} のマクローリン展開が必要であり，$(1-p+pe^t)^n$ の t についてのベキ展開がめんどうである。

イ 微分法を利用する方法

二項分布 $B(n,\ p)$ の積率母関数は

$$M(t)=E(e^{tx})=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}{}_nC_xp^xq^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}{}_nC_x(pe^t)^xq^{n-x}=(pe^t+q)^n$$

この両辺を t について微分すると

$$M'(t)=n(pe^t+q)^{n-1}\cdot pe^t=np(pe^t+q)^{n-1}e^t$$

更に，両辺を t について微分すると

$$M''(t)=n(n-1)p^2(pe^t+q)^{n-2}e^{2t}+np(pe^t+q)^{n-1}e^t$$

$$\therefore E(X)=\mu_1'=M'(0)=np(p+q)^{n-1}=np$$

また，$E(X^2)=\mu_2'=M''(0)=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np(p+q)^{n-1}$

$$=n(n-1)p^2+np$$

であるから

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p)=npq$$

〈注〉技巧が必要でなく，簡単に求められる。

(6) 特性関数を用いる方法

ア　定義による方法

二項分布 $B(n,\ p)$ の特性関数は

$$\varphi(\theta)=E(e^{i\theta x})=\sum_{x=0}^{n}e^{i\theta x}{}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}{}_nC_x(pe^{i\theta})^x(1-p)^{n-x}$$
$$=(1-p+pe^{i\theta})^n$$

これを θ についてベキ展開すると

$$\varphi(\theta)=(1-p+pe^{i\theta})^n=\{1-p+p(1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots\cdots)\}^n$$
$$=\{1+pi\theta+\frac{1}{2!}p(i\theta)^2+\frac{1}{3!}p(i\theta)^3+\cdots\cdots\}^n$$
$$=1+\frac{n!}{(n-1)!1!0!\cdots0!}pi\theta+\left\{\frac{n!}{(n-2)!2!0!\cdots0!}(pi\theta)^2\right.$$
$$\left.+\frac{n!}{(n-1)!0!1!0!\cdots0!}\frac{1}{2!}p(i\theta)^2\right\}$$
$$+\left\{\frac{n!}{(n-3)!3!0!\cdots0!}(pi\theta)^3+\frac{n!}{(n-2)!1!1!0!\cdots0!}pi\theta\cdot\frac{1}{2!}p(i\theta)^2\right.$$
$$\left.+\frac{n!}{(n-1)!0!1!0!\cdots0!}\frac{1}{3!}p(i\theta)^3\right\}+\cdots\cdots$$
$$=1+npi\theta+\frac{n(n-1)p^2+np}{2!}(i\theta)^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)p^3+3n(n-1)p^2+np}{3!}(i\theta)^3+\cdots\cdots$$

一方

$$\varphi(\theta)=E(e^{i\theta x})=E(1+i\theta x+\frac{(i\theta x)^2}{2!}+\frac{(i\theta x)^3}{3!}+\cdots\cdots)$$
$$=1+E(x)\cdot(i\theta)+\frac{E(x^2)}{2!}(i\theta)^2+\frac{E(x^3)}{3!}(i\theta)^3+\cdots\cdots$$

両者を比較して

$$E(x)=np$$

$$E(x^2) = n(n-1)p^2 + np$$

よって

$$E(X) = np$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq$$

〈注〉 $e^{i\theta}$ や $e^{i\theta x}$ のマクローリン展開が必要であり，$(1-p+pe^{i\theta})^n$ の θ についてのベキ展開がめんどうである。

イ 微分法を利用する方法

二項分布 $B(n,\ p)$ の特性関数は

$$\varphi(\theta) = E(e^{i\theta x}) = \sum_{x=0}^{n} e^{i\theta x}{}_nC_x p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x (pe^{i\theta})^x q^{n-x}$$

$$= (pe^{i\theta} + q)^n$$

この両辺を θ について微分すると

$$\varphi'(\theta) = n(pe^{i\theta}+q)^{n-1} pe^{i\theta} \cdot i = npie^{i\theta}(pe^{i\theta}+q)^{n-1}$$

更に，両辺を θ について微分すると

$$\varphi''(\theta) = npie^{i\theta} i (pe^{i\theta}+q)^{n-1} + npie^{i\theta}(n-1)(pe^{i\theta}+q)^{n-2} \cdot pe^{i\theta} \cdot i$$

$$= -npe^{i\theta}(pe^{i\theta}+q)^{n-1} - np^2(e^{i\theta})^2(n-1)(pe^{i\theta}+q)^{n-2}$$

よって

$$E(X) = \mu_1' = \frac{\varphi'(0)}{i} = \frac{npi(p+q)^{n-1}}{i} = np$$

$$E(X^2) = \mu_2' = \frac{\varphi''(0)}{i^2} = \frac{-np(p+q)^{n-1} - np^2(n-1)(p+q)^{n-2}}{-1}$$

$$= np + n(n-1)p^2$$

であるから

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np(1-p) = npq$$

〈注〉 技巧が必要でなく，簡単に求められる。

5. ま と め

高等学校では，二項分布の平均と分散の公式 $E(X) = np$，$V(X) = npq$ の

求め方は普通(ⅰ)類推による方法，(ⅱ)確率変数の和の性質を利用する方法，(ⅲ)二項定理を用い一般の二項分布から直接計算によって求める方法の3通りである。教科書での取り扱いは，(ⅱ)確率変数の和の性質を利用する方法が多い。しかし，生徒が多様化している上に，数学Bの履修のための前提条件は数学Ⅰの履修だけであることを考慮すれば，厳密に証明するのではなくて，類推により確かめる程度の扱いをした教科書もあってもよいと考える。やさしい分かる統計の指導を目指したい。しかし，$B(3, p)$ または $B(4, p)$ の一例から平均と分散を求めて，一般化するのは，数学的な考え方の育成という観点からも検討の余地がある。

はじめに述べたように，確率分布は高等学校での選択履修という仕組みと入試の出題範囲外にしている大学が多いことから，その履修は極めて少ない。学習指導要領の小項目「ア　確率の計算」はまだしも，「イ　確率分布」となると文系ではその履修はほとんど皆無に等しい。学生が多様化している上に，特に文系では高校での数学の履修は様々である。大学においては，このことを十分に考慮した講義内容の展開が必要になってきている。高校で数学Ⅲの微積分を履修してない場合は，かなり思い切って直観的に取り扱う方がよい。むしろそれなりに統一のとれた方式を考え出すのが適切である。

大学の共通教育のテキストに，二項定理を用い一般の二項分布から直接計算によって平均と分散を求めているのを見かけるが，これは計算がだいぶめんどうであり，技巧的である。正に秘術を尽しての証明であるといっても過言でない。したがって，この方法は避けたい。二項分布は $(p+q)^n$ の二項展開からつくられているということに，こだわる必要がない。

大学1年で統計学を指導するときは，その実態を踏まえて，すなわち高校で数学Ⅲを履修していないならば，$B(n, p)$ に確率変数の和の性質を利用する方法がよいと考える。確率変数の和の性質の確認や復習にもなるし，その理解が深まることにもなる。統計学の履修に先立って，大学で微積分学を履修した学生に対してはいろいろな解法が可能であるが，積率母関数に微分法を利用する

方法は一番簡単で興味深い手法である。要するに，数学の学習の実態に即した取り扱いをすることが最も大切である。

参　考　文　献

1）数学Ｂ全教科書（10社21種類）。

2）石井博昭・塩出省吾・新森修一共著「確率統計の数理」裳華房，1995年，p. 34～p. 35，p. 38～p. 39。

3）神崎可也・中川哲男共著「プラクティカル統計学」1995年，p. 47～p. 52，p. 60。

4）木村等・大薮和雄・石川浩共著「統計学入門」実教出版，1996年，p. 98～p. 101。

5）文部省「高等学校学習指導要領解説　数学編理数編」ぎょうせい，平成元年，p. 87。

6）村上正康著「高等学校における確率・統計の指導法について」統計学会チュートリアル・セミナー，1995年，p. 79～p. 80。

7）大竹真一著「国公立２次・私大用傾向と対策　数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲ・Ｃ」旺文社，平成10年，p. 2。

8）薩摩順吉著「確率・統計」岩波書店，1998年，p. 68～p. 74。

9）正田実・茂木勇編「改訂高等学校学習指導要領の展開　数学科編」明治図書，1990年，p. 218～p. 219。

10）東京大学教養学部統計学教室「統計学入門」東京大学出版会，1997年，p. 111～p. 113，p. 130。

11）上園信武著「国公立２次・私大用傾向と対策　数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ」旺文社，平成10年，p. 2。

12）宇田川正友著「教師のための初等数学講座　確率と統計」岩崎書店，昭和34年，p. 111～p. 114。

13）和達三樹・十河清著「キーポイント確率・統計」岩波書店，1994年，p. 36～p. 38。