松　山　大　学　論　集
第 33 巻 第 1 号 抜 刷
2 0 2 1 年 4 月 発 行

大西佐兵衛著『雑題』の研究

―― 第 1 巻より ――

平　田　浩　一

大西佐兵衛著『雑題』の研究
── 第1巻より ──

平　田　浩　一

1　は じ め に

江戸時代に日本独自に発達した数学を「和算」という。愛媛には，和算を学んだ人々が自分の学問の向上や一門の繁栄を祈願して数学の問題を絵馬にして神社仏閣に奉納した「算額」が数多く残されている。特に幕末から明治にかけて松山市道後の伊佐爾波神社に奉納された算額は22面が現存し,[1] 昭和55年に松山市の有形民俗文化財，平成17年に愛媛県の有形民俗文化財の指定を受けている［1］［2］。筆者は愛媛和算研究会と共同研究を行い，伊佐爾波神社の算額を含む愛媛県内の算額39面について調査研究をし，その成果を［2］にまとめている。

算額には，問題と答え，さらに「術文」と呼ばれる，問題に与えられている数値から答えを導くための短い計算式が書かれているのみで，その計算式をどのようにして導いたのか，その導出過程については全く触れられていない。そのため筆者らが［2］の算額研究を行った際には，現代数学を使って計算式を導く過程を解明することに力を注いで研究を行った。このように和算の問題を現代数学を用いて解いたものを現代解と呼んでいる。

伊佐爾波神社の算額の中で一番古いものが大西佐兵衛の算額で1803年（享和3年）に奉納されている。その大西佐兵衛は松山藩家老水野家の用人を務め，

1）神社仏閣の中で現存する算額の数の多さでは伊佐爾波神社が日本一である［3］。

和算は江戸で丸山良玄に学んでいる。彼は和算書『雑題』全30巻を著し，それは現在愛媛県立図書館に所蔵されている。その書の内容は大西が江戸で学んだ最先端の和算で構成されている。雑題は当時の松山藩では秘伝の書といわれ，大西の門弟たちは競って写し合ったという伝えが残っている［1］。

大西佐兵衛の雑題全30巻は約1,800ページもある大部の著作である。和算書は，算額とは異なり，術文を導出する過程を「解義」として詳しく記述している。和算書の研究においてはこの解義を詳細に調べ和算家がどのように解答を導いたか，その過程の研究に力点がおかれる。

愛媛県内の高等学校と中学校の数学教員が中心となって組織している愛媛和算研究会では年2回開催している研究会において，2014年から2019年まで藤田貞資著の『精要算法』の問題研究に取り組み，その現代解については愛媛大学教育学部の学生が教員の指導のもとでその資料作りを行ってきた。精要算法の研究が一段落した後，2020年からは大西佐兵衛の雑題の現代解研究へ研究テーマを切り替えることにし，その最初の研究会で学生が第1巻から第3巻までの範囲から7問を取り上げ現代解を発表している［4］。愛媛和算研究会では今後も雑題の現代解研究を継続して行うこととなっている。

筆者も愛媛和算研究会に加わっており，これまでは愛媛大学教育学部学生の現代解研究の指導を行ってきた。2020年4月から松山大学勤務となったことを契機として，和算書の解義の研究にも着手することにした。この小論は雑題の第1巻に的をしぼり，現代的解法と解義の読解の両面から行った研究である。

和算書における数式は，関孝和が考案した傍書法（点竄術）で記されている。

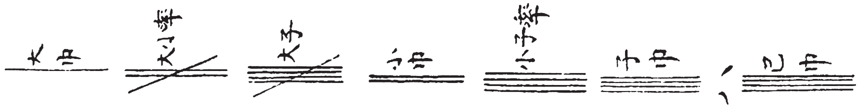

図1　傍書法による数式

この図1は本来縦書きのものを90°回転させてある。式中には4個の変数「大」「小」「子」「巳」があり，「率」は$\sqrt{2}$を意味し，「巾」は2乗を意味している。係数は算木数字[2)]で表されてあり，負の係数には斜線が入っている。この傍書式を現代的に表せば次のようになる。

$$大^2-2\sqrt{2}大小-4大子+2小^2+4\sqrt{2}小子+4子^2=4巳^2$$

解義の研究には漢文の読解と，傍書法を現代の数式に変換する作業が伴う。

2　第1巻の問題3問

雑題の第1巻は22ページあり，3問の問題からなっている。

算額と同様に，「問題」を最初に述べ，続いて，「答曰」として答えの数値を述べ，次に「術文」（術曰）として答えの数値を導く簡潔な計算式が述べられる。和算書が算額と異なるところは，その後に「解義」として，術文の計算式をどのようにして導くかについてその計算過程が詳細に記されていることである。

この節では，第1巻の問題3問について「問題」「答曰」「術文」のみ抜き出すこととする。「解義」については第4節で取り上げる。

【問題1】　今図のように，円弧内に大と小の正方形と円を容れる[3)]。大正方形の一辺が24.5寸，小正方形の一辺が19.6寸のとき，容円の直径はいくらか。

【答曰】　容円の直径は16.000有奇（寸）

2）算木は和算に使われた計算道具で，飛鳥時代に日本に伝わった。傍書法では係数の数値は算木の表記を用いた。

3）「容れる」はぴったりと接するように入れるという意味である。

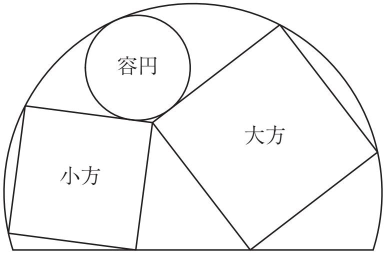

図 2　問題 1

【術文】　天 $=\sqrt{2}$

地 $=$ 天 $+1=\sqrt{2}+1$

容円直径 $=2\cdot$ 地 $\left\{ 大+小-\sqrt{(大\cdot天+小)\cdot小+大^2} \right\}$

【問題 2】　今図のように，円弧内に大と小の正方形と円を容れる。小正方形の一辺が 47.95 寸，容円の直径が 38.36 寸[4)]のとき，大正方形の一辺の長さを求めよ。

【答曰】　大正方形の一辺は 57.28000 有奇（寸）

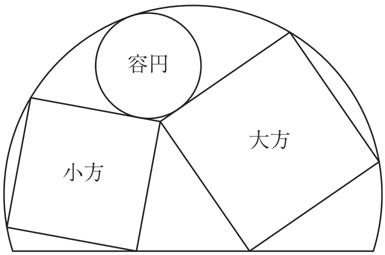

図 3　問題 2

4）原文では 38.26 寸とあるが誤記と思われる。

【術文】 天$=\sqrt{2}$

$$地=\left\{小方面-\frac{1}{4}(天-1)容円径\right\}容円径$$

$$大方面=\frac{地}{天\cdot小方面-容円径}$$

【問題 3】 今図のように，円弧内に大と小の正方形と円を容れる。大正方形の一辺が 11.31 寸，容円直径が 7.54 寸のとき，小正方形の一辺の長さはいくらか。

【答曰】 小正方形の一辺の長さは 9.39 有奇（寸）

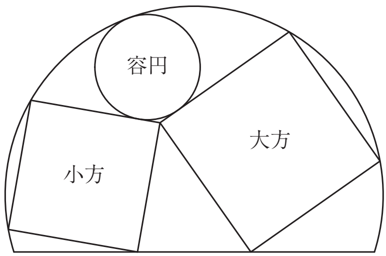

図 4　問題 3

【術文】 天$=\sqrt{0.5}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$地=天+1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$小方面=\left(\frac{地}{4\left(\dfrac{大}{容円径}-天\right)}+天\right)\cdot容円径$$

これら3問の問題は「大正方形の1辺の長さ，小正方形の1辺の長さ，容円の直径」という3つの値の内から2つ値を与えて，残りの値を求める3通りの問題になっている。

3　現　代　解

和算書の解義を読み進める前に，これらの問題自体をよく理解しておく必要がある。この節では問題を現代の数学を用いて解いてみることにする。そのために少し準備が必要である。

3.1　準備

3問の問題に共通な要素は，円内に接する2つの正方形があり，さらにその隙間に接する容円があることである。これら4種の要素の関係をいきなり扱うのは難しすぎるので，最初に容円を取り除いた状態，すなわち図5のような円に内接する2つの正方形の性質について調べることから始める。

そこで，図5のように円O内に1つの正方形ABCDが与えられたとき，もう一方の正方形CPQRを作図する方法について最初に考えてみる。次の2つの補題のように，作図法が2つある。

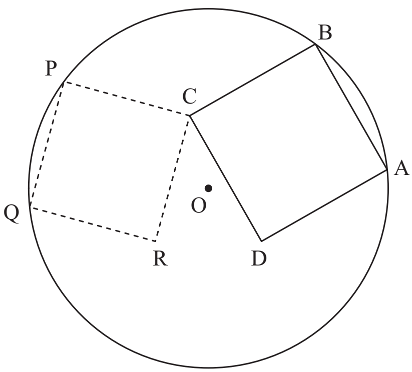

図5　円に内接する2つの正方形

補題 1　図 6 のように，円の直径 CO に関して正方形 ABCD を線対称移動した正方形を QPCR とすれば，その正方形は円 O と 2 点 P，Q で接する。

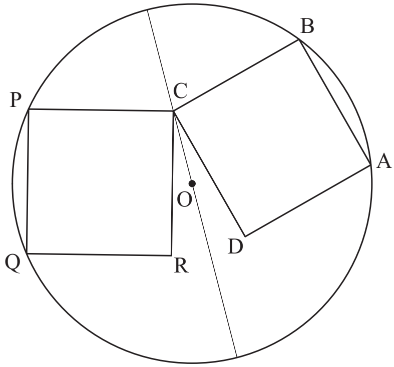

図 6　補題 1

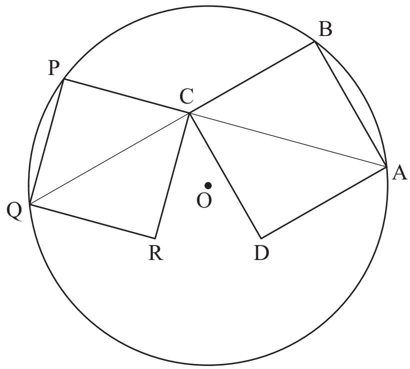

図 7　補題 2

（証明）　正方形 CPQR が円の内部にあり 2 点 P，Q で円に接していることは明らかである。ただし，点 O が正方形 ABCD の内部または周上にある場合には，2 つの正方形 ABCD と CPQR は点 C 以外の共有部分を持つので，そのような場合を除外する。また，正方形 CPQR の大きさは正方形 ABCD に等しい。　□

補題 2　図 7 のように，辺 BC を延長して円 O と再び交わる点を Q とする。このとき，線分 CQ を対角線とする正方形を CPQR とすれば，その正方形は円 O と 2 点 P，Q で接する。またこのとき，$\angle \mathrm{BCP} = 135^\circ$ である。

（証明）　弦 AB と弦 BQ が垂直であることにより，線分 AQ は円の直径である。また 3 点 A，C，P は一直線上にあることより，弦 AP と弦 PQ が垂直となり，点 P は円周上にある。以上により，正方形 CPQR が円の内部にあり 2 点 P，Q で円に接している。また，2 つの正方形が 1 点 C のみを共有していること，$\angle \mathrm{BCP} = 135^\circ$ であることも明らかである。　□

図5の正方形CPQRの作図法は補題1と補題2以外にはないことを次に示す。その準備として次の補題3が必要である。

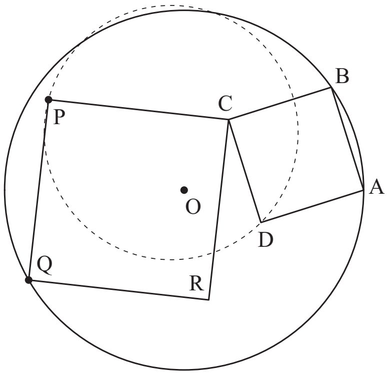

図8 軌跡問題1.2

補題3 図8のように，定円Oの内部に定正方形ABCDがあり，正方形は2点A，Bで円Oに接しているとする。円Oの周上に動点Qをとり，線分CQを対角線とする正方形を図のように（反時計回りに）CPQRとするとき，点Pの軌跡は円である。

（証明） 定円Oの半径をRとする。図9のように，線分CQ上に$\mathrm{CS}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{CQ}$（＝CP）となる点Sをとる。このとき点Sの軌跡は円Oを点Cを中心として$\frac{1}{\sqrt{2}}$に相似縮小したものなので，$\mathrm{CO_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{CO}$となる線分CO上の点$\mathrm{O_1}$をとるとき，点Sの軌跡は$\mathrm{O_1}$を中心とする半径$\frac{R}{\sqrt{2}}$の円である。

また，点Pの軌跡は円$\mathrm{O_1}$を点Cを中心として$-45°$回転させたものである。点$\mathrm{O_1}$を点Cを中心として$-45°$回転させた点を$\mathrm{O_2}$とすれば，点$\mathrm{O_2}$は線分COを対角線とする正方形の1頂点である。点$\mathrm{O_2}$を中心とする半径$\frac{R}{\sqrt{2}}$の円が求める点Pの軌跡である。 □

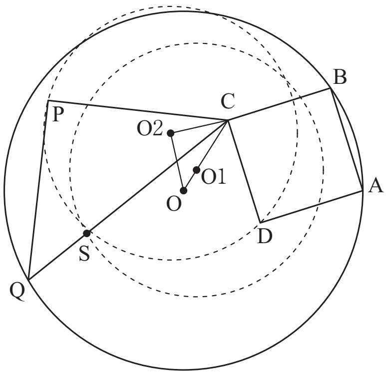

図 9　補題 3 の証明

定理 1　図 5 のように，円 O の内部に正方形 ABCD があり，２点 A，B で円と接しているとする。このとき，円 O の内部の正方形 CPQR で２点 P，Q で円に接し，かつ２つの正方形が１点 C のみを共有するものは，補題 1 と補題 2 により作図されるもの以外にはない。特に，２つの正方形の大きさが異なるものは，補題 2 により作図されるものだけである。

（証明）　図 5 の点 P は，円 O の周上にあり，かつ補題 3 の点 P の軌跡としての円 O_2 の周上にある。これらの２円は半径が異なっているので，交点は高々２つである。そのため，補題 1 と補題 2 により作図されるもの以外にはないことが分かる。また，補題 1 の場合は２つの正方形が同じ大きさになってしまうため，２つの正方形の大きさが異なるものは，補題 2 により作図されるものだけである。　□

以上により，雑題第 1 巻の 3 問に関わる正方形は，補題 2 の作図によって得られるものであることが確認された。

次に，円の半径と，その内部の２つの正方形の辺の長さに関する関係式を導く。

定理 2 図 10 のように，円 O の内部に異なる大きさの 2 つの正方形 ABCD と CPQR があり 1 点 C を共有しているとし，また円 O は正方形 ABCD と 2 点 A，B で接していて正方形 CPQR とは 2 点 P，Q で接しているとする。円 O の半径を R，正方形 ABCD と CPQR の一辺の長さをそれぞれ a，b とするとき次の関係式が成り立つ。

$$2R^2 = a^2 + \sqrt{2}\,ab + b^2$$

ただし，2 つの正方形の 4 頂点は ABCD，CPQR の順に反時計回りになっているものとする。

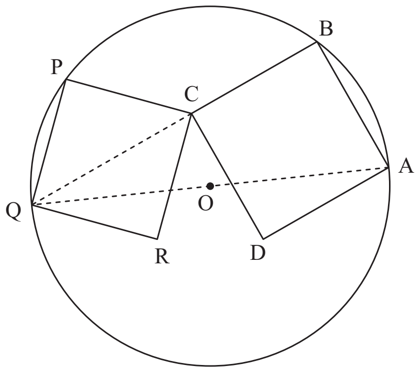

図 10 定理 2

（証明） 定理 1 により，2 つの正方形の大きさが異なるのは補題 2 の作図の場合である。従って図 10 のように 3 点 B，C，Q，は同一直線上にある。このとき，

$$\mathrm{AQ} = 2R, \quad \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = a, \quad \mathrm{CQ} = \sqrt{2}\,b$$

なので，△ABQ に三平方の定理を用いて

$$4R^2=a^2+(a+\sqrt{2}\,b)^2$$
$$2R^2=a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2$$

となる。 □

次に，容円との関係を求める。

定理 3　図 11 のように，円 O の内部に異なる大きさの２つの正方形 ABCD と CPQR があり１点 C を共有しているとし，また円 O は，正方形 ABCD と２点 A，B で接していて，正方形 CPQR とは２点 P，Q で接しているとする。さらに，２辺 BC，CP と円 O に接する円 K があり，円 K の半径を r，正方形 ABCD と CPQR の一辺の長さをそれぞれ a，b とするとき，次の関係式が成り立つ。ただし，２つの正方形の４頂点は ABCD，CPQR の順に反時計回りになっているものとする。

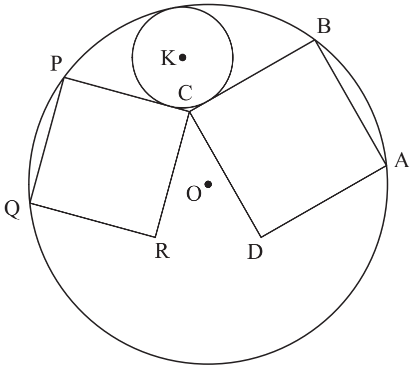

図 11　定理 3

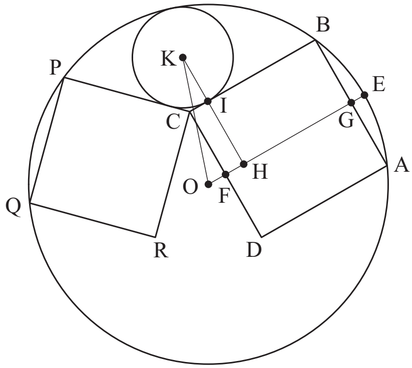

図 12　定理 3 の証明

（i）　$r=(\sqrt{2}+1)\left(a+b-\sqrt{a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2}\right)$

（ii）　$(\sqrt{2}-1)r^2-2(a+b)r+\sqrt{2}\,ab=0$

（証明）　図12のようにABと垂直な半径をOEとし，OEと2線分CD，ABとの交点をそれぞれF，Gとする。またKからOE，BCに下ろした垂線の足をそれぞれH，Iとする。そして，OG$=p$，CI$=x$とおく。

定理2により

$$2R^2=a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2 \tag{1}$$

である。△ABQに中点連結定理を用いることで，

$$p=\frac{a+\sqrt{2}\,b}{2} \tag{2}$$

となる。直角三角形△KOHに三平方の定理を用いると

$$(p-a+x)^2+\left(r+\frac{a}{2}\right)^2=(R-r)^2 \tag{3}$$

である。補題2により$\angle \mathrm{PCB}=\dfrac{3\pi}{4}\ (=135^\circ)$となり，$\angle \mathrm{KCI}=\dfrac{3\pi}{8}$となるので

$$r=\mathrm{KI}=\mathrm{CI}\cdot\tan\frac{3\pi}{8}=(\sqrt{2}+1)x$$

従って

$$r=(\sqrt{2}+1)x,\quad x=(\sqrt{2}-1)r \tag{4}$$

である。

式(3)に(2)と(4)を代入し整理すると

$$x^2+\left\{\sqrt{2}\,(a+b)+2(\sqrt{2}+1)R\right\}x+\frac{1}{2}(a^2-\sqrt{2}\,ab+b^2)-R^2=0$$

が得られ，これに(1)を代入することで

$$x^2+\left\{\sqrt{2}\,(a+b)+2(\sqrt{2}+1)R\right\}x-\sqrt{2}\,ab=0 \tag{5}$$

となる。このままでは，式(1)と組み合わせて R を消去しようとすると x の4次方程式になってしまう。

そこで，この方程式の変形を一工夫してみる。2次方程式(5)の判別式を計算してみると

$$D=\left\{\sqrt{2}\,(a+b)+2(\sqrt{2}+1)R\right\}^2+4\sqrt{2}\,ab$$

$$=(12+8\sqrt{2})R^2+(8+4\sqrt{2})(a+b)R+2a^2+(4+4\sqrt{2})ab+2b^2 \tag{6}$$

である。これが平方式になってくれれば(5)の左辺は1次式2つに因数分解できる。そこで $D=\{sR+t(a+b)\}^2$ となるための実数 s，t を求めることにする。

最初に(6)式の定数項 $2a^2+(4+4\sqrt{2})ab+2b^2$ であるが，このままでは $t^2(a+b)^2$ とはならない。そこで，式(1)を利用して $(12+8\sqrt{2})R^2$ の一部にあたる $2uR^2$ を定数項側に移動させてみる。そうするとき定数項は

$$2uR^2+2a^2+(4+4\sqrt{2})ab+2b^2=t^2(a+b)^2$$

となり，式(1)を代入して

$$(u+2)a^2+\{4+(4+u)\sqrt{2}\}ab+(u+2)b^2=t^2a^2+2t^2ab+t^2b^2$$

係数比較して

$$u+2=t^2,\quad 4+(4+u)\sqrt{2}=2t^2$$

整理して

$$u=4+4\sqrt{2},\quad t^2=6+4\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})^2$$

を得る。このとき $s=2$ となる。従って D は

$$\begin{aligned}D&=4R^2+(8+4\sqrt{2})(a+b)R+(2+\sqrt{2})^2(a+b)^2\\&=\{2R+(2+\sqrt{2})(a+b)\}^2\end{aligned}$$

となる。

このことを用いて2次方程式(5)を解くと

$$x=\frac{1}{2}[-\sqrt{2}(a+b)-2(\sqrt{2}+1)R\pm\{2R+(2+\sqrt{2})(a+b)\}]$$

となる。この2解のうち一方は明らかに負なのでもう一方を選ぶと

$$x=a+b-\sqrt{2}R=a+b-\sqrt{a^2+\sqrt{2}ab+b^2}$$

となる。式(4)により r は

$$r=(\sqrt{2}+1)\left(a+b-\sqrt{a^2+\sqrt{2}ab+b^2}\right)\tag{7}$$

となり(i)を得る[5]。

次に(7)を変形し

$$(\sqrt{2}-1)r-(a+b)=-\sqrt{a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2}$$

両辺を平方することで

$$(\sqrt{2}-1)r^2-2(a+b)r+\sqrt{2}\,ab=0$$

となり(ii)が得られる。 □

3. 2　問題 1 の現代解

この定理 3 を用いれば，雑題第 1 巻の 3 問は簡単に解くことができる。

【解答】　大正方形の 1 辺を a，小正方形の 1 辺を b，容円の半径を r とおくとき，定理 3(i)により

$$r=(\sqrt{2}+1)\left(a+b-\sqrt{a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2}\right)$$

である。この式に，$a=19.6$，$b=24.5$ を代入することで，$r=8.00018\cdots$ となる。 □

3. 3　問題 2 の現代解

【解答】　大正方形の 1 辺を a，小正方形の 1 辺を b，容円の半径を r とおき，定理 3(ii)を用いると

5）式(5)から式(7)を導くところが，この証明で苦労したところである。解義においても同様で，分かりやすいように記号 A を補って説明しているところで巧妙な計算がなされている。

$$(\sqrt{2}-1)r^2-2(a+b)r+\sqrt{2}ab=0$$

となる。これを a について解くと

$$a=\frac{\{2b-(\sqrt{2}-1)r\}r}{\sqrt{2}b-2r}$$

が得られる。この式に，$b=47.95$，$2r=38.36$ を代入することで，$a=57.2800011$ … となる。 □

3.4　問題3の現代解

【解答】　大正方形の1辺を a，小正方形の1辺を b，容円の半径を r とおき，定理3(ii)を用いると

$$(\sqrt{2}-1)r^2-2(a+b)r+\sqrt{2}\mathrm{ab}=0$$

となる。これを b について解くと

$$b=\frac{\{2a-(\sqrt{2}-1)r\}r}{\sqrt{2}a-2r}$$

が得られる。この式に，$a=11.31$，$2r=7.54$ を代入することで，$b=9.3900083$ … となる。 □

　問題2の現代解と比較すると，a と b が入れ替わっているだけで，本質的に同じ式である。問題自体が大方面と小方面に関して対称であるから，結論も対称であるのは当然である。

4　解　　　義

それでは雑題の解義について見ていこう。なるべく原文に忠実に訳すように心掛けてはいるが，言葉を足した方がよいと思われる場合は角括弧〔　〕をつけて表すこととした。原文の中で小さな文字で書かれている部分は丸括弧（　）をつけて表すことととした。原文には式番号はないが，読みやすいように式番号をつけた箇所がいくつかある。原文の式中では $\sqrt{2}$ を「率」と表記しているが，分かりやすさを考えて $\sqrt{2}$ と表記した。和算での方程式には変数記号は含まれないのであるが，変数記号 X，Y，…などを補って表記した。四角に線で囲まれた部分は原文でもそのようになっている。また，補足事項は脚注とした。

問題 3 は，問題 2 の術文（迂遠として再計算した式）の大方面と小方面を入れ替えて計算すればよいだけなので，問題 3 には解義がついていない。その代わりに，問題 3 を作るときの数値の決め方についての説明となっている。

4.1　問題 1 の解義

大方有り　小方有り　容径有り（天元）　子有り（虚一）　外径有り（前術[6] により仮に有るとする）

〔図 13 のように〕

$$容+大=2丑 \tag{8}$$

$$外-容=2寅 \tag{9}$$

$\boxed{斜率〔\sqrt{2}〕を 率 と書く〔式内では \sqrt{2} と表す〕}$

6）前術とは雑題第 2 巻問題 9 を指していると思われる。それは定理 2 の公式を求める問題である。

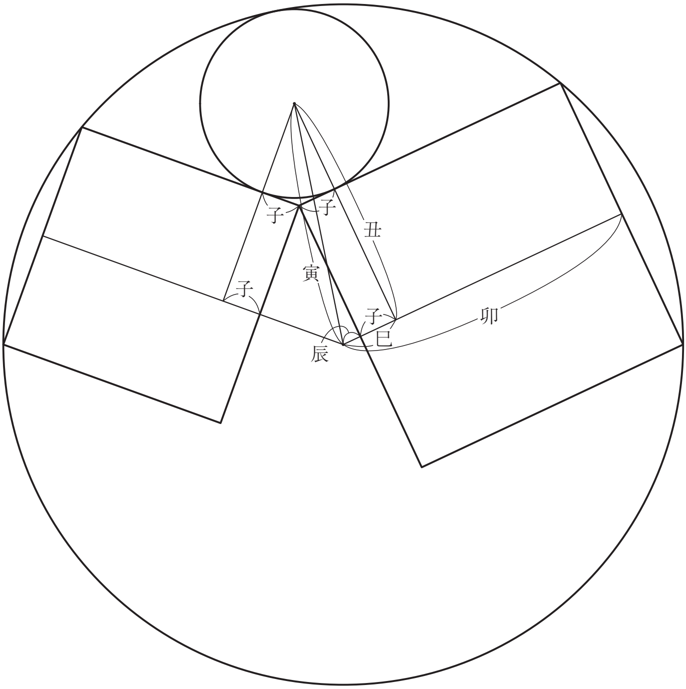

図 13　解義の図

$$大 + \sqrt{2}小 = 2卯$$[7]　　（卯の形は前図[8] を見よ）

これから 2大 を減じた余り

$$-大 + \sqrt{2}小 = 2辰$$

2子 を加え得る

7）定理 3 の証明の式(2)である。
8）前図とは雑題第 2 巻問題 9 解義の最後の図（図 10 と酷似）を指していると思われる。

$$-大+\sqrt{2}小+2子=2巳$$

これを自乗して

$$大^2-2\sqrt{2}大小-4大子+2小^2+4\sqrt{2}小子+4子^2=4巳^2 \qquad (寄左)$$

2寅〔(9)〕を自乗したものから 4丑^2〔(8)の自乗〕を減じた余り

$$外^2-2外容-2容大-大^2〔=4寅^2-4丑^2〕=4巳^2$$

寄左と相消し得る

$$2大^2-2\sqrt{2}大小-4大子+2小^2+4\sqrt{2}小子+4子^2-外^2+2外容+2大容=0$$

$$\boxed{外^2=2大^2+2\sqrt{2}大小+2小^2}$$ [9)]

外径^2 を代入し整理して得る

$$-4\sqrt{2}大小+4\sqrt{2}小子-4大子+4子^2+2外容+2大容=0$$

2 でこれを約し〔$X=$〕子 の方程式を得る

$$-2\sqrt{2}大小+外容+大容+(2\sqrt{2}小-2大)X+2X^2=0 \qquad (前式)$$

〔この問題は 大 と 小 に関して対称なので〕前式の大を小とし小を大とすることで后式を求める

9）定理 2 である。雑題では第 2 巻問題 9 でこの式を求めている。

$$-2\sqrt{2}\text{大小}+\text{外容}+\text{小容}+(2\sqrt{2}\text{大}-2\text{小})X+2X^2=0 \qquad \text{(后式)}$$

前式と后式を相消し得る

$$-\text{大容}+\text{小容}+(2\sqrt{2}\text{大}-2\text{小}-2\sqrt{2}\text{小}+2\text{大})X=0$$

これを次のようにくくる

$$-(\text{大}-\text{小})\text{容}+\{2\sqrt{2}(\text{大}-\text{小})+2(\text{大}-\text{小})\}X=0$$

（大－小）をすべて省くことで下式を得る

$$-\text{容}+(2\sqrt{2}+2)X=0 \qquad \text{(一式)}$$

$$\boxed{\text{角}=\sqrt{2}+1,\ \text{亢}=\sqrt{2}-1,\ \text{角亢}=1} \qquad (10)$$

一式をくくって次を得る

$$-\text{容}+2\text{角}X=0$$

これを下のように変形し

$$-\text{容角亢}+2\text{角}X=0$$

角 をすべて省き得る

$$-\text{容亢}+2X=0 \qquad \text{(二式)}$$

一式に大方面を掛け前式を加え得る

$$-2\sqrt{2}\text{大小}+\text{外容}+(2\sqrt{2}\text{小}+2\sqrt{2}\text{大})X+2X^2=0$$

これを下のようにくくる

$$-2\sqrt{2}\text{大小}+\text{外容}+2\sqrt{2}(\text{大}+\text{小})X+2X^2=0$$

これより二式〔に X を掛けたもの〕を減じた余り

$$-2\sqrt{2}\text{大小}+\text{外容}+\{2\sqrt{2}(\text{大}+\text{小})+\text{容亢}\}X=0 \qquad \text{（三式）}$$

$\boxed{\text{大}+\text{小}=\text{和とする}}$

二式と三式から〔X を消去することで〕得る

$$-4\sqrt{2}\text{大小}+2\text{外容}+2\sqrt{2}\text{和容亢}+\text{容}^2\text{亢}^2=0$$

これを〔式⑽により〕変形し

$$-4\sqrt{2}\text{大小角}^2\text{亢}^2+2\text{外容角}^2\text{亢}^2+2\sqrt{2}\text{和容亢}^2\text{角}+\text{容}^2\text{亢}^2=0$$

亢^2 をすべて下のように省く

$$-4\sqrt{2}\text{大小角}^2+2\text{外容角}^2+2\sqrt{2}\text{和容角}+\text{容}^2=0$$

これにより〔$Y=$〕容径 の方程式を求める

$$-4\sqrt{2}\text{大小角}^2+(2\text{外角}^2+2\sqrt{2}\text{和角})Y+Y^2=0$$

角 の累乗を下のように省く

$$\boxed{〔Z=〕\frac{\text{容}}{\text{角}}\text{の方程式}}$$

$$-4\sqrt{2}\text{大小}+(2\text{外角}+2\sqrt{2}\text{和})Z+Z^2=0$$

外^2＝2 大^2＋$2\sqrt{2}$ 大小＋2 小^2

$\boxed{\text{大}^2+\sqrt{2}\text{大小}+\text{小}^2=\text{東と名づく}}$

これをくくり　　外^2＝2 東

これを平方に開き　　外$=\sqrt{2}\sqrt{\text{東}}$

外径 を代入し得る

$$-4\sqrt{2}\text{大小}+(2\sqrt{2}\sqrt{\text{東}}\text{角}+2\sqrt{2}\text{和})Z+Z^2=0$$

斜率〔$\sqrt{2}$〕の累乗を省いて得る

$$\boxed{〔W=〕\frac{\text{容}}{\sqrt{2}\text{角}}\text{の方程式}}$$

$$-2\sqrt{2}\text{大小}+(2\sqrt{\text{東}}\text{角}+2\text{和})W+W^2=0 \qquad \text{（原式）}$$

ここにおいて式を計り[10)]

10）（原式）の 2 次方程式を解くための準備。

$$\sqrt{東}角+和+W=（左式）$$

これを自乗し原式を減じた余り〔を A とする〕[11)]

$$〔A=(\sqrt{東}角+和+W)^2-\{-2\sqrt{2}大小+(2\sqrt{東}角+2和)W+W^2\}〕$$
$$=東角^2+2\sqrt{東}和角+和^2+2\sqrt{2}大小$$

$$〔A=〕東角^2+2\sqrt{東}和角+和^2+2\sqrt{2}大小$$

東 を代入して

$$〔A=〕大^2角^2+\sqrt{2}大小角^2+小^2角^2+2\sqrt{東}和角+和^2+2\sqrt{2}大小$$

角^2 を代入して $\boxed{角^2=3+2\sqrt{2}}$

$$〔A=〕2\sqrt{2}大^2+3大^2+4大小+3\sqrt{2}大小+2\sqrt{2}小^2+3小^2$$
$$+2\sqrt{東}和角+和^2+2\sqrt{2}大小$$
$$〔=2\sqrt{2}(大^2+2大小+小^2)+(大^2+\sqrt{2}大小+小^2)$$
$$+2(大^2+2大小+小^2)+和^2+2\sqrt{東}和角〕$$
$$=2\sqrt{2}和^2+東+3和^2+2\sqrt{東}和角$$
$$=東+2\sqrt{東}和角+和^2角^2$$

これをくくって次を得る

11）記号 A は（原式）の 2 次方程式の判別式。これを平方完成の形に変形する。

$$〔A=〕東+2\sqrt{東}和角+和^2角^2$$

これを平方に開いて

$$〔A=〕(\sqrt{東}+和角)^2$$

左式と相消して得る

$$〔(\sqrt{東}角+和+W)^2=(\sqrt{東}+和角)^2〕$$

$$〔\sqrt{東}角+和+W=\sqrt{東}+和角〕$$

$$\sqrt{東}角+和-\sqrt{東}-和角+W=0$$

角〔$=\sqrt{2}+1$〕を代入して整理して得る

$$\sqrt{2}\sqrt{東}-\sqrt{2}和+W=0$$ [12)]

〔方程式の〕定数項に $\sqrt{2}角$ を乗じて（前に累乗で割ったので故に〔今度はそれを〕乗じて）下式を得る〔すなわち，$W=\dfrac{容}{\sqrt{2}角}$ の方程式を $Y=容$ の方程式に変換する〕

$$2\sqrt{東}角-2和角+Y=0 \tag{11}$$

ここにおいて本術を起こす

12）これが 2 次方程式（原式）の解である。

ゆえに本術に曰く[13)]

$$天=\sqrt{2}=1.414213562373(=斜率)$$

$$地=\sqrt{2}+1(=角)$$

$$大方面\cdot天=34.6482322763$$

$$(大方面\cdot天+小方面)小方面=1063.265352615$$

$$(大方面\cdot天+小方面)小方面+大方面^2=1663.5153526154(=東)$$

$$\sqrt{(大方面\cdot天+小方面)小方面+大方面^2}=40.7862152278$$

$$大方面+小方面-\sqrt{(大方面\cdot天+小方面)小方面+大方面^2}=3.313784772113$$

$$容円径=2\cdot地\left\{大方面+小方面-\sqrt{(大方面\cdot天+小方面)小方面+大方面^2}\right\}=16.0003682792$$

4.2　問題2の解義

前術により次のようになる〔式(11)により〕

$$2角\sqrt{東}-2角和+容=0$$

これを左右に分け

$$-2角和+容=(左)\qquad 2角\sqrt{東}=(右)$$

13）数値には若干誤差があるが原文の数値をそのまま載せている。

自乗することで

$$4角^2和^2-4容角和+容^2=(又左)\qquad 4角^2東=(又右)$$

又左右を相消して得る

$$4角^2和^2-4容角和+容^2-4\,角^2東=0$$

東〔$=大^2+\sqrt{2}大小+小^2$〕と 和〔$=大+小$〕を代入し整理して得る

$$-4\sqrt{2}角^2大小+8角^2大小-4角容大-4角容小+容^2=0$$

これを〔⑽により〕くくって

$$4\sqrt{2}角^2亢大小-4角容大-4角容小+容^2=0$$

これを変形して

$$4\sqrt{2}角大小-4角容大-4角容小+容^2=0$$

これを 4角 で除して

$$\sqrt{2}大小-容大-容小+\frac{亢容^2}{4}=0$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{4}=\frac{亢}{4}=氏}$$

これをくくって〔$X=大$ の〕方程式を得る

$$氏容^2-容小+(\sqrt{2}小-容)X=0 \tag{12}$$

ここにおいて本術を起こす

ゆえに本術に曰く[14)]

$$天=\sqrt{2}=1.4142135623\ （=斜率）$$

$$\frac{1}{4}(天-1)=0.10355339059\left(=\frac{亢}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4}(天-1)容円径=3.9723080631$$

$$小方面-\frac{1}{4}(天-1)容円径=43.9776919368$$

$$地=\left\{小方面-\frac{1}{4}(天-1)容円径\right\}容円径=1686.9842626975$$

〔式⑿の定数項〕

$$天\cdot小方面-容円径=29.451540315785$$ 〔式⑿の 1 次の係数〕

$$大方面=\frac{地}{天\cdot小方面-容円径}=57.28000\ 有奇$$

この術は迂遠[15)] なりゆえに次のようにする

$$氏容^2-容小+(\sqrt{2}小-容)X=0$$

〔方程式の〕定数項から容円径を省き〔$Y=\frac{大}{容}$ の方程式を〕得る

$$氏容-小+(\sqrt{2}小-容)Y=0$$

14）数値は末尾 1 桁に誤差があるくらいでほぼ正確な値となっている。原文のまま記載。

15）迂遠という意味は，術文に使われる漢文の文字数が少し多いという意味。もっと少ない文字数の術文を作るために計算をやり直している。

これを $\sqrt{2}$容 で除して得る

$$\frac{氏}{\sqrt{2}}-\frac{小}{\sqrt{2}容}+\left(\frac{小}{容}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)Y=0$$

$$\boxed{房=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{0.5} \qquad \frac{小}{容}=心}$$

これをくくって

$$房氏-房心+(心-房)Y=0$$

定数項に 房^2 を加減して

$$房氏-房^2+房^2-房心+(心-房)Y=0$$

$$\boxed{心-房=尾}$$

$$房氏-房^2-房尾+尾Y=0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{4}=氏 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}=房$$

ゆえに 氏 と 房 を相乗じて

$$〔房氏=〕\ \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

房^2 を減じた余り

$$〔房氏-房^2=〕\ \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}^{\,2}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$$

これをくくって箕と名づける

$$〔房氏-房^2=〕-\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{4}=-箕$$

これを変形して

$$-箕-房尾+尾Y=0$$

これを 尾 で除して

$$-\frac{箕}{尾}-房+Y=0$$

本術を起こす

ゆえに本術に曰く[16]

$$天=\sqrt{0.5}=\frac{1}{\sqrt{2}}(=房)$$

$$地=天+1\ (=4箕)$$

$$\frac{小方面}{容円径}-天(=尾)$$

$$大方面=\left(\frac{地}{4\left(\frac{小方面}{容円径}-天\right)}+天\right)容円径$$

4.3 問題 3

大正方形の一辺が 3 寸 容円直径が 2 寸〔のとき〕術により小正方形の一辺

16) この術文の小方面と大方面を入れ替えた式が問題 3 の術文になっている。

は2.49071840なり

零約略術[17]〔を用いると〕

2.49071840	0	1	
1	1	0	
0.4907184	−2	1	ヨ
0.0185632	5	−2	ツ
0.0080752	−132	53	ヨ
0.0024128	269	−108	ツ
0.0008368	−939	377	ヨ

〔となるので〕この数を用いた〔すなわち，

$$2.49071840 \fallingdotseq \frac{939}{377}$$

となるので，問題の数値を3.77倍することで問題3は，大正方形の一辺が11.31寸，容円直径が7.54寸のとき，小正方形の一辺の長さは9.39000有奇（寸）となる。[18]〕

大正方形の一辺が2寸 容円直径が1寸〔のとき〕術により小正方形の一辺は1.0372010914寸なり　零約術より〔$1.0372010914 \fallingdotseq \frac{474}{457}$なので，数値を4.57倍することで〕大正方形の一辺が9.14寸　小正方形の一辺が4.74寸　容円直径が4.57寸

〔小正方形の一辺の長さは正確には4.7400089であり，〕3桁を与えるだけで6桁まで一致する〔よい数値である〕 しかれども大正方形と小正方形の辺の長さの差が多く図に微差あり　ゆえに〔この問題は〕用いず　図〔15〕のように小方面が弦の外に溢れゆえに微差あり

17）小数をなるべく簡単な分数で表す術［5］。
18）雑題には実寸の図が載っているが，ここでは縮小した図を載せる。

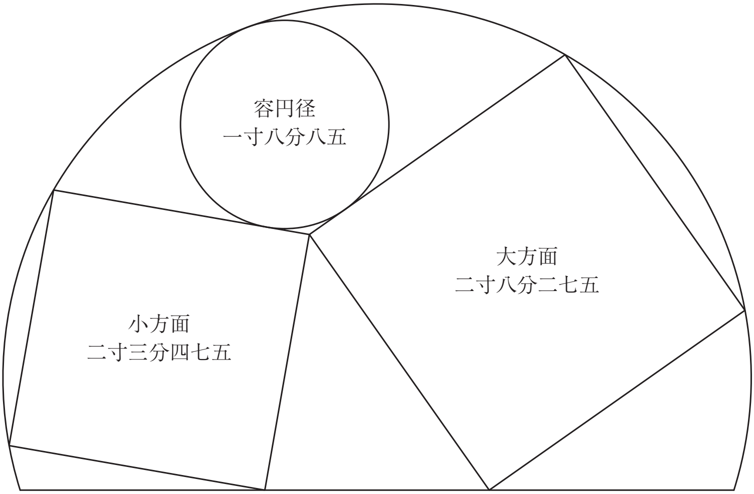

図 14　問題 3 の数値を 4 分の 1 にした図

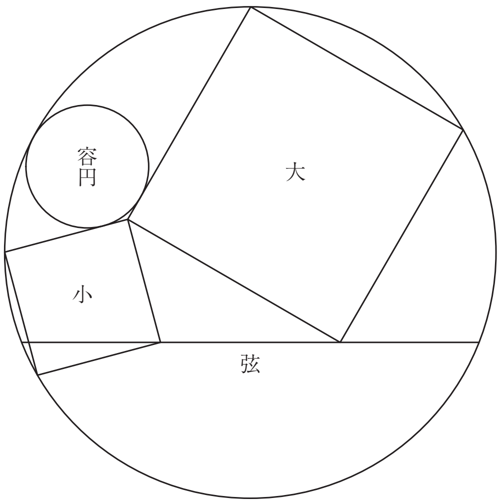

図 15　採用しなかった問題の図

5 ま　と　め

本稿は，2020 年度に交付を受けた松山大学特別研究助成「大西佐兵衛の和算書『雑題』（第 1 巻〜第 5 巻）の研究」によって得られた研究成果である。

この論文では大西が特に力を入れて書いていると思われる第 1 巻に焦点をあてて現代解と解義を取りまとめた。

第 3 節の現代解については，愛媛大学教育学部の学生 4 名が卒業研究で現代解を作成し発表している［4］。その解法と基本的なアイデアは同じであるが，補題や定理の記述を見直し，証明はより簡潔明瞭なものとなるように書き直しを行った。

第 4 節の解義は，筆者が和算書の解法を研究する初めての取り組みである。傍書法の勉強は数年前に始めたばかりであるため，十分に読解できていない部分もあると思われる。間違いなどにお気づきの際はご指摘を願いたい。

また，定理 3 の証明のなかで式(5)から式(7)を導く計算は，脚注にも述べたように厄介なものであった。同様なことを和算家が巧妙な手法で処理していることには驚かされた。今後の研究においても，和算家の計算能力の高さに驚かされることがしばしばあるだろうと楽しみにしている。

今回取り上げた問題 3 は，全国のハイレベルな算額を収録した［6］によれば，大西が 1799 年（寛政 11 年）に東京都港区芝増上寺境内天満宮に奉納した算額の問題である。しかしその算額は現存しない。

参　考　文　献

［1］伊佐爾波神社，「道後八幡 伊佐爾波神社の算額」，伊佐爾波神社 紀要第 1 集，2005
［2］平田浩一・谷本賢治編著，「愛媛の算額研究　〜現代解法を通して〜」，愛媛和算研究会，2017
［3］小寺裕，「だから楽しい江戸の算額　和算絵馬「算額」の魅力がいっぱい」，研成社，2007
［4］内田ひかり・西岡香奈・民部晃司・森信駿，「『雑題』一巻〜三巻を読む〔第 1 回〕」，第 42 回愛媛和算研究会発表資料，2020

［5］和算研究所・佐藤健一編，「和算百科」，丸善出版，2017
［6］藤田嘉言，「続神壁算法」，1807