松　山　大　学　論　集
第 35 巻 第 3 号 抜 刷
２ ０ ２ ３ 年 ８ 月 発 行

算変座標の基礎 (1)

平　田　浩　一

算変座標の基礎 (1)

平　田　浩　一

1　はじめに

算変座標は論文［3］で導入した円の幾何学における座標系である。平面 E^2 に無限遠点を加えた E^2_∞ には反転により生成される一般メビウス変換群が作用する。また E^2_∞ 上の２つの有向円 c_1，c_2 に対して一般メビウス変換で不変な値として反転距離 $s(c_1,\ c_2)\in \boldsymbol{R}$ が定義できる。これらをもとにして，基準３円と呼ばれる３有向定円が与えられたときに，任意の有向円から基準３円までの反転距離でもって円の座標としての算変座標を定義した。さらにその座標系における基礎公式として半径公式と距離公式を導くことにより，その算変座標は一般メビウス変換で不変な座標系であるだけでなく，円の幾何学を考える上での重要なツールとなることを紹介した。

論文［4］では基準距離が $(1,\ 1,\ 1)$ である基準３円についての基礎理論を展開するとともに，和算の中でも難問として知られる杉成算の問題に算変座標の理論を用いることで，$n=7$ の場合の杉成算を解くことができた。また［5］でも算変座標が和算の問題に有効であることを示した。

この論文では基準３円 c_1，c_2，c_3 の基準距離 $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ が $\sigma>0$ をみたす場合について，算変座標の基礎理論を構築することが目的である。

2　算変座標

ここでは論文［3］での算変座標について簡単にまとめてみる。有向円に対し，その向きが反時計回りなら正，時計回りなら負と半径に符号をつけたもの

を**符号つき半径**と呼ぶ。有向円 c の向きを逆にした有向円を $-c$ と表すことにする。2 つの有向円 c_1 と c_2 の**反転距離** $s(c_1, c_2)\in\boldsymbol{R}$ は複比を用いて定義されるが，2 円の符号つき半径が r_1，r_2 で中心間の距離が d のときは

$$s(c_1, c_2)=\frac{d^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}$$

となる。反転距離の基礎的な事柄は［3］の補題 3 ～ 5 である。

3 つの有向定円 c_1，c_2，c_3 が与えられたとき，有向円 c の**算変座標** $[s_1, s_2, s_3]$ を

$$[s_1, s_2, s_3]=[s(c, c_1), s(c, c_2), s(c, c_3)]$$

により定義する。算変座標を定める 3 有向定円 c_1，c_2，c_3 を**基準 3 円**と呼び，基準 3 円相互の反転距離

$$(e_1, e_2, e_3)=(s(c_2, c_3), s(c_3, c_1), s(c_1, c_2))$$

を**基準距離**と呼ぶ。基準距離に対して記号 σ を

$$\sigma=e_1^2+e_2^2+e_3^2+2e_1e_2e_3-1$$

と定める。

この σ は基準 3 円の位置関係を知る上で重要な値で，その性質は論文［3］の補題 18，定理 3，定理 4 で取り上げている。特に定理 4 は重要で，$\sigma>0$ のときは基準 3 円すべてに直交する円がただ 1 つ存在する。その直交円を c_o と記すことにする。同論文の補題 17 により，有向円 c の c_o による反転像を c' とするとき，c と $-c'$ は同一の算変座標を持つ。同じ算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ をも

つ有向円が２つ存在することになる。

同一座標を持つ円が２つ存在することは座標系として不備であるとの見方もあるかもしれないが，同一座標を持つ２つの円の位置関係が「c_o による反転像」と明瞭であることにより，特に大きな支障にはならない。このことを補題としてまとめる。

補題１　E^2_∞ 上の基準３円 c_1，c_2，c_3 があり $\sigma>0$ をみたしていて，基準３円すべてに直交する円を c_o とする。有向円 c の算変座標を $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ とし，円 c_o による c の反転像を c' とする。このとき c' の算変座標は $[-s_1,\ -s_2,\ -s_3]$ で，$-c'$ の算変座標は $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ である。

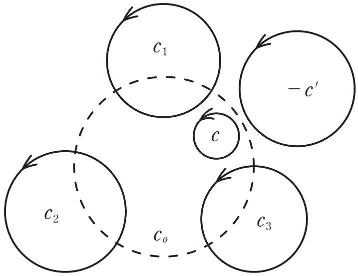

図１　同一の算変座標をもつ円

図１のように基準３円 c_1，c_2，c_3 を決めたときには，同時に直交円 c_o も同じ図に書き入れるとよい。求める円が c だとすればそれと同じ算変座標をもつもう一つの円を $-c'$ とすれば，c' は c_o による c の反転像である。両者の半径 $|r|$ を比較すると，c_o の内側にある方が小さく外側にある方が大きいことは明らかである。このことを利用して半径公式の２解のうち求めるものがどちらであるかを簡単に判別することができる。

3 基準距離と σ の性質

この論文では「３円が…」というときは，言外に「異なる３円が…」を意味している。有向円については「３有向円が…」というときには，同一円で向きが異なる c と $-c$ が３円中に含まれる可能性がある。

補題２ 基準３円の中に同一円であるが向きが異なる２有向円 c，$-c$ が含まれているとき $\sigma=0$ となる。

（証明） c_1 と c_2 が向きが異なる同一円と仮定すると $c_2=-c_1$ となり，［4］の第２節にあるように $e_3=s(c_1,\ c_2)=1$ となる。また，

$$e_1=s(c_2,\ c_3)=s(-c_1,\ c_3)=-s(c_1,\ c_3)=-e_2$$

となることから $\sigma=e_2^2+e_2^2+1-2e_2^2-1=0$ となる。 □

この補題の対偶をとると，$\sigma\neq 0$ ならば基準３円の中に同一円であるが向きが異なる２有向円 c，$-c$ が含まれることはない。すなわち，$\sigma\neq 0$ ならば（向きを無視しても）基準３円は異なる３円となる。

補題３ ３実数 e_1，e_2，e_3 の中に値が ± 1 となるものが１つでもあれば，$\sigma\geqq 0$ である。

（証明） $e_1=\pm 1$ のときを示す。このとき

$$\sigma=1+e_2^2+e_3^2\pm 2e_2e_3-1=(e_2\pm e_3)^2\geqq 0$$

となる。 □

補題 4　$\sigma<0$ のとき 3 つの不等式

$$|e_1|>1,\quad |e_2|>1,\quad |e_3|>1$$

のどれか 1 つが成り立てば，すべてが成り立つ。

(証明)　$|e_1|>1$ が成り立つとき $|e_2|>1$ を示せばよい。σ は式変形すると

$$\sigma=(e_3+e_1e_2)^2-(e_1^2-1)(e_2^2-1)$$

となる。$\sigma<0$ なので

$$(e_1^2-1)(e_2^2-1)>(e_3+e_1e_2)^2\geqq 0$$

となり $(e_1^2-1)(e_2^2-1)>0$ が成り立つ。従って $|e_1|>1$ のとき $|e_2|>1$ となる。
□

補題 5　基準 3 円 c_1，c_2，c_3 が 1 点を共有すれば $\sigma=0$ である。

(証明)　3 円の共有点を反転中心として反転させることで，c_1，c_2，c_3 がすべて E^2 上の直線となる。3 直線の相互のなす角を $0\leqq\theta_1$，θ_2，$\theta_3\leqq\pi$ とするとき $\cos\theta_3=\cos(\theta_1\pm\theta_2)$ となる。そこで $e_1=-\cos\theta_1$，$e_2=-\cos\theta_2$，$e_3=-\cos\theta_3$ により

$$e_3=-\cos(\theta_1\pm\theta_2)=-\cos\theta_1\cos\theta_2\pm\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$e_3+e_1e_2=\pm\sin\theta_1\sin\theta_2$$

両辺を 2 乗して

$$(e_3+e_1e_2)^2=\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2=(1-e_1^2)(1-e_2^2)$$

従って $\sigma=(e_3+e_1e_2)^2-(e_1^2-1)(e_2^2-1)=0$ となる。 □

4　一般メビウス変換

反転を何回か合成した変換を E^2_∞ の**一般メビウス変換**と呼ぶ。一般メビウス変換 f は E^2_∞ 上の有向円全体のなす集合 $O(E^2_\infty)$ における変換

$$f:O(E^2_\infty)\longrightarrow O(E^2_\infty)$$

とみなすことができる。一般メビウス変換には合同変換や相似変換としての鏡映，平行移動，回転，相似が含まれる。また，任意の相似変換を f とするとき $f(\infty)=\infty$ である。

(a)　直線 l に関する反転は鏡映である。
(b)　平行な 2 直線 l_1, l_2 による反転の合成は平行移動である。
(c)　交わる 2 直線 l_1, l_2 による反転の合成はその交点を中心とする回転である。
(d)　同心円 c_1, c_2 による反転の合成は，その中心による中心相似変換である。

ここで E^2 上の直線と円を表現する記号を導入する。

定義 1　記号 L_a, M_a^r をつぎのように定義する。
(a)　点 $(a,\ 0)$ を通り y 軸に平行で上向きの有向直線を L_a と表す。
(b)　点 $(a,\ 0)$ を中心として符号つき半径が r の有向円を M_a^r と表す。

補題 6　e を任意の実数とする。x 軸上に中心をもち符号つき半径が 1 の有向円 $c=M_a^1$ で $s(L_0,\ c)=e$ をみたすものは $c=M_e^1$ のみである。

（証明）　x 軸上に中心をもち符号つき半径が 1 の有向円は $M_a^1\,(a\in\boldsymbol{R})$ である。そのような円に対しては $s(L_0,\ M_a^1)=a$ であるので，これが e と一致するのは $a=e$ のときだけである。従ってそのような円は M_e^1 ただ 1 つである。　□

補題 7　2 有向円 c_1，c_2 がありその反転距離を $s(c_1,\ c_2)=e$ とする。このとき，一般メビウス変換 f で

$$f(c_1)=L_0,\ f(c_2)=M_e^1$$

となるものが存在する。ただし，$c_2\neq -c_1$ とする。

（証明）　円 c_1 の周上の点で c_2 の周上にはない点を反転中心とする反転により c_1 は E^2 の直線に移り c_2 は E^2 の円に移る。つぎに相似変換により c_2 を半径 1 の円に移す。続いて回転により c_1 を y 軸と平行で向きは上向きになるように移す。さらに平行移動により c_1 を L_0 と一致させ c_2 の中心が x 軸上にのるように移す。このように一般メビウス変換で移した結果として，c_1 は L_0 に移り c_2 は x 軸上に中心をもつ符号つき半径が ± 1 の円に移る。ここでもし c_2 の移る先の符号つき半径が -1 の場合は，さらに y 軸による反転を加えることで符号つき半径を 1 とすることができる。

これまでの操作の合成を一般メビウス関数 f とすれば，$f(c_1)=L_0$ で $f(c_2)=M_a^1$ となり

$$s(L_0,\ M_a^1)=s(f(c_1),\ f(c_2))=s(c_1,\ c_2)=e$$

が成り立つので，補題6によりそのような有向円はただ1つであり $f(c_2)=M_e^1$ となる。 □

定理1　2有向円 c_1, c_2 と2有向円 c_1', c_2' があり $s(c_1, c_2)=s(c_1', c_2')$ とする。このとき $f(c_1)=c_1'$, $f(c_2)=c_2'$ をみたす一般メビウス変換 f が存在する。ただし，$c_2 \neq -c_1$ かつ $c_2' \neq -c_1'$ とする。

（証明）　$s(c_1, c_2)=s(c_1', c_2')=e$ とおく。補題7により，c_1, c_2 をそれぞれ L_0, M_e^1 に移す一般メビウス変換を f_1 とする。同様に c_1', c_2' をそれぞれ L_0, M_e^1 に移す一般メビウス変換を f_2 とする。このとき，一般メビウス変換 $f=f_2^{-1}\circ f_1$ により $f(c_1)=c_1'$, $f(c_2)=c_2'$ となる。 □

論文［3］の第2節に述べているように，ステレオ投影により E_∞^2 は球面 S^2 と同一視することができる。また，E_∞^2 上の円は S^2 上の大円または小円とみなすことができる。球面 S^2 は大円または小円で切ることにより2つの領域に分割されることは明らかである。この事実をステレオ投影で E_∞^2 に移すことにより，E_∞^2 はその上の円により2つの領域に分割される。このことを利用してつぎの定義を行う。

定義2　E_∞^2 上の円 c と，c 上にない2点A, Bが与えられている。円 c により分けられる E_∞^2 の2領域に対し，2点A, Bが同じ領域に含まれるとき2点は**円 c の同じ側にある**といい，2点A, Bが異なる領域に含まれるとき，2点は**円 c の異なる側にある**という。

ここで注意することとして，円の内側と外側という用語が使えるのは E^2 上の円の場合であって，E^2 上の直線に対しては使えない。今定義した同じ側と異なる側という用語はすべての E_∞^2 上の円に対して用いることができる。

補題8　基準3円 c_1, c_2, c_3 があり $\sigma \neq 0$ とする。2円 c_1, c_2 が2交点A, Bをもつときつぎが成り立つ。

(a)　2点A, Bが c_3 の同じ側にあるための必要十分条件は $\sigma > 0$

(b)　2点A, Bが c_3 の異なる側にあるための必要十分条件は $\sigma < 0$

(証明)　2点A, Bの少なくとも一方が円 c_3 上にあれば，補題5により $\sigma = 0$ となる。従って，仮定 $\sigma \neq 0$ により2点A, Bはどちらも c_3 上にはない。そこで，一般メビウス変換で移すことにより，c_1, c_2 の2交点は原点Oと無限遠点∞，すなわち c_1, c_2 は原点Oで交わる E^2 上の2つの有向直線で，c_3 は E^2 上の有向円で中心が O_3 で符号つき半径は $r_3 = 1$ と仮定しても一般性は失われない。

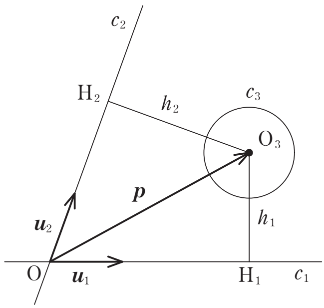

図2　補題8の証明

図2のように有向直線 c_1, c_2 の向きに沿った単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ とし，$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OO_3}$ とする。また，点 O_3 から c_1, c_2 に引いた垂線の足をそれぞれ H_1, H_2 とする。ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を $-90°$ 回転したベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ とし，

$$\boldsymbol{p} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2, \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = k \quad (|k| < 1)$$

とする。点 O_3 の c_1, c_2 からの符号つき距離をそれぞれ h_1, h_2 とすれば $r_3=1$ により

$$e_1=h_2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}_2=ka+b,\quad e_2=h_1=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}_1=a+kb$$
$$e_3=-\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=-k,\quad |\boldsymbol{p}|^2=a^2+b^2+2kab$$

となる。そこで σ を計算すると

$$\begin{aligned}\sigma&=e_1^2+e_2^2+e_3^2+2e_1e_2e_3-1\\&=(ka+b)^2+(a+kb)^2+k^2-2(ka+b)(a+kb)k-1\\&=(1-k^2)(a^2+b^2+2kab-1)\\&=(1-k^2)(|\boldsymbol{p}|^2-1)\end{aligned}$$

となる。無限遠点 ∞ は円 c_3 の外側にあり，原点 O が円 c_3 のどちら側にあるかは $|\boldsymbol{p}|$ と $r_3=1$ の大小で決まる。$1-k^2>0$ により，$|\boldsymbol{p}|>1$ であるための条件は $\sigma>0$ で，$|\boldsymbol{p}|<1$ であるための条件は $\sigma<0$ となり，補題が成り立つ。 □

5　基準3円の存在

この節では $\sigma>0$ をみたす3実数 e_1, e_2, e_3 が与えられたとき，基準距離が (e_1, e_2, e_3) である基準3円 c_1, c_2, c_3 が存在するかどうかについて考察する。この節の結論を最初に述べると，つぎの2定理が成り立つ。

定理2　3実数 e_1, e_2, e_3 は $\sigma>0$ をみたしているとする。このとき E_∞^2 上の基準3円 c_1, c_2, c_3 で基準距離が (e_1, e_2, e_3) となるものが存在する。

定理3　2つの基準3円 c_1, c_2, c_3 と c_1', c_2', c_3' があり，ともに共通の基準距離 (e_1, e_2, e_3) をもち $\sigma>0$ をみたしているとする。このとき

$$f(c_1)=c_1',\quad f(c_2)=c_2',\quad f(c_3)=c_3'$$

となる一般メビウス変換 f が存在する。

これら2つの定理を証明するために $|e_3|$ の値で場合分けして3つの補題を準備する。最初は $|e_3|>1$ の場合である。

補題9　共有点を持たない2有向定円 c_1, c_2 があり，$s(c_1,\ c_2)=e_3\,(|e_3|>1)$ とする。任意の2実数 e_1, e_2 が条件 $\sigma>0$ をみたすとき，つぎが成り立つ。

(a)　条件 $s(c_1,\ c_3)=e_2$, $s(c_2,\ c_3)=e_1$ をみたす有向円 c_3 は無数に存在する。

(b)　(a)の条件をみたす2つの有向円を c_3, c_3' とするとき

$$f(c_1)=c_1,\quad f(c_2)=c_2,\quad f(c_3)=c_3'$$

となる一般メビウス変換 f が存在する。

(証明)　論文［3］の第5節にまとめた円束の知識を用いると，c_1, c_2 が生成する円束は双曲型円束となり，その2焦点の1つを反転中心として反転させることにより2円は同心円となる。そのため2有向円 c_1, c_2 は原点Oを中心とし符号つき半径がそれぞれ r_1, r_2 の円であると仮定しても一般性は失われない。このとき

$$e_3=\frac{0^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}$$

により，

$$r_1^2+r_2^2=-2e_3r_1r_2 \tag{1}$$

となる。有向円 c_3 については，E^2 上の有向直線である場合と，E^2 上の有向円である場合で場合分けする。

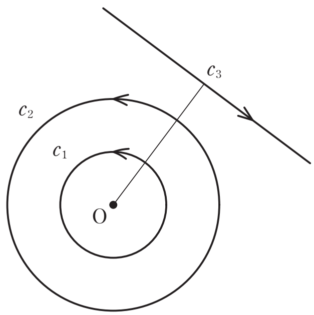

図3　補題9の証明（c_3 が直線の場合）

（c_3 が E^2 上の有向直線である場合）　図3において，直線 c_3 と原点Oとの符号つき距離を h とする。このとき反転距離の定義により

$$e_1 = \frac{h}{r_2}, \quad e_2 = \frac{h}{r_1}$$

となる。このことにより，c_3 が E^2 の直線となるための必要条件は

$$e_1 r_2 = e_2 r_1 \tag{2}$$

である。逆にこの条件式(2)をみたす e_1，e_2 に対しては原点からの符号つき距離が $h = e_1 r_2$ であるような有向直線 c_3 が存在する。また原点を中心として c_3 を回転させることでこのような c_3 は無数に存在する。そのような2つの有向直線を c_3，c_3' とするとき，原点を中心とする回転 f で

$$f(c_1) = c_1, \quad f(c_2) = c_2, \quad f(c_3) = c_3'$$

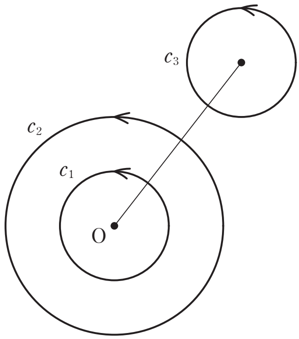

図 4　補題 9 の証明（c_3 が円の場合）

となるものが存在する。

（c_3 が E^2 上の有向円である場合）　図 4 において，円 c_3 の中心と原点 O との距離を $d \geqq 0$ とし，円 c_3 の符号つき半径を r とする。ここで，$d=0$ の場合は 3 円 c_1，c_2，c_3 すべてが同心円となり同一円束に属すことにより［3］の補題 18 により $\sigma=0$ となり仮定に反する。従って $d>0$ である。反転距離の定義により

$$e_1=\frac{d^2-r_2^2-r^2}{2r_2r},\quad e_2=\frac{d^2-r_1^2-r^2}{2r_1r}$$

分母を払うことで

$$2e_1r_2r+r_2^2+r^2=d^2,\quad 2e_2r_1r+r_1^2+r^2=d^2 \tag{3}$$

となる。この 2 式の差をとることで

$$2(e_1r_2-e_2r_1)r=r_1^2-r_2^2$$

となる。ここで補題2により $|r_1| \neq |r_2|$ なので，解 $r \neq 0$ が存在するための条件は

$$e_1 r_2 \neq e_2 r_1 \tag{4}$$

である。逆に条件式(4)を仮定すると

$$r = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2(e_1 r_2 - e_2 r_1)} \neq 0 \tag{5}$$

となり，これを(3)の一方の式に代入し整理すると

$$4(e_1 r_2 - e_2 r_1)^2 d^2 = (r_1^2 + r_2^2)^2 + 4r_1^2 r_2^2 (e_1^2 + e_2^2 - 1) - 4e_1 e_2 r_1 r_2 (r_1^2 + r_2^2)$$

となる。これに(1)を代入することで

$$\begin{aligned} 4(e_1 r_2 - e_2 r_1)^2 d^2 &= 4e_3^2 r_1^2 r_2^2 + 4r_1^2 r_2^2 (e_1^2 + e_2^2 - 1) + 8e_1 e_2 e_3 r_1^2 r_2^2 \\ &= 4r_1^2 r_2^2 (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 2e_1 e_2 e_3 - 1) \\ &= 4r_1^2 r_2^2 \sigma \end{aligned}$$

となり

$$d^2 = \frac{r_1^2 r_2^2 \sigma}{(e_1 r_2 - e_2 r_1)^2} > 0 \tag{6}$$

を得る。従って(4)のとき，(5)，(6)によりつねに円 c_3 が存在する。また原点を中心として c_3 を回転させることでこのような c_3 は無数に存在することになる。そのような2つの有向円を c_3，c_3' とする。c_3 を c_3' に移す原点を中心とする回転を一般メビウス変換 f とするとき

$$f(c_1)=c_1,\quad f(c_2)=c_2,\quad f(c_3)=c_3'$$

となる。

以上により補題9が証明された。 □

つぎは$|e_3|<1$の場合である。

補題10　2点を共有する2有向定円c_1, c_2があり，$s(c_1, c_2)=e_3(|e_3|<1)$とする。任意の2実数e_1, e_2が条件$\sigma>0$をみたすとき，つぎが成り立つ。

(a)　条件$s(c_1, c_3)=e_2$, $s(c_2, c_3)=e_1$をみたす有向円c_3は無数に存在する。

(b)　(a)の条件をみたす2つの有向円をc_3, c_3'とするとき

$$f(c_1)=c_1,\quad f(c_2)=c_2,\quad f(c_3)=c_3'$$

となる一般メビウス変換fが存在する。

(証明)　2円c_1, c_2は2交点をもつので，その2交点の1つを反転中心として反転させることにより2円は交わる2直線となる。そこで平行移動によりc_1, c_2は原点Oを通るE^2上の有向直線であると仮定しても一般性は失われない。ここでさらにc_3もE^2上の有向直線と仮定すると，c_1, c_2, c_3が1点（無限遠点）で交わることになり補題5により$\sigma=0$となり仮定と矛盾する。従ってc_3はE^2上の有向円である。また，補題8により原点Oは円c_3の外部にある。

図5のようにc_3の中心をP，符号つき半径をrとし，点Pから2直線c_1, c_2までの符号つき距離をそれぞれh_1, h_2とするとき，反転距離e_1, e_2の定義により

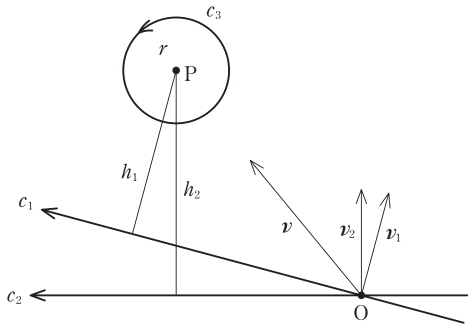

図 5　補題 10 証明の図

$$h_1 = re_2, \quad h_2 = re_1 \tag{7}$$

となるで，実数 $r \neq 0$ が与えられたとき h_1，h_2 が一意に定まる。有向直線 c_1，c_2 の方向ベクトルを $-90°$ 回転させた単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ とする。このとき $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = -e_3$ となる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$ とおくとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \boldsymbol{v}_1 = a - e_3 b = h_1 = re_2, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \boldsymbol{v}_2 = -e_3 a + b = h_2 = re_1$$

となるので，これを解くことにより c_1，c_2，e_1，e_2，e_3 で決まる定ベクトル $\boldsymbol{v}$ により

$$\boldsymbol{v} = \frac{e_2 + e_1 e_3}{1 - e_3^2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{e_1 + e_2 e_3}{1 - e_3^2}\boldsymbol{v}_2, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\boldsymbol{v}$$

となる。実数 $r \neq 0$ は任意に選べるので，このような c_3 は無数に存在する。

そのような 2 円を c_3，c_3' とし，その符号つき半径をそれぞれ r，r' とする。ここで r と r' の符号により場合分けする。

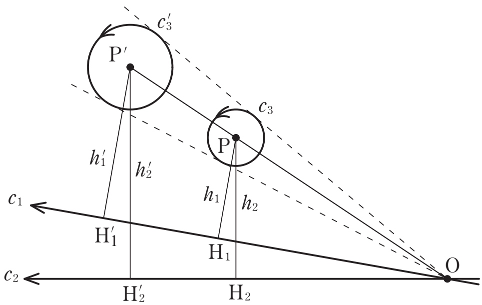

図 6　補題 10（r と r' が同符号のとき）

（r と r' が同符号のとき）図 6 のように 2 円 c_3, c_3' の向きは同じなので，$r'=kr\,(k>0)$ とおくとき式(7)により

$$h_1'=kh_1,\quad h_2'=kh_2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

となる。原点 O を中心とする k 倍の中心相似変換を f とすれば

$$f(c_1)=c_1,\quad f(c_2)=c_2,\quad f(c_3)=c_3'$$

となり補題が成り立つ。

（r と r' が異符号のとき）この場合は図 7 のように 2 円 c_3, c_3' の向きが異なっているので，中心相似変換のみでは対応できない。原点 O を中心として円 c_3' を 180° 回転させた円を c_3'' とする。O から 2 円 c_3, c_3'' に引いた接線の長さを t, t'' とし，O を中心とする半径 $\sqrt{tt''}$ の円による反転を g とする。また，O を中心とする 180° の回転を h とする。一般メビウス変換を $f=h\circ g$ とするとき，

$$f(c_1)=h(g(c_1))=h(-c_1)=c_1,\quad f(c_2)=h(g(c_2))=h(-c_2)=c_2,$$
$$f(c_3)=h(g(c_3))=h(c_3'')=c_3'$$

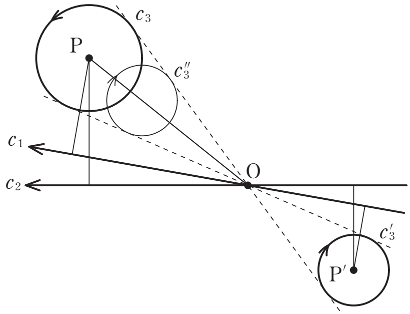

図7　補題10（r と r' が異符号のとき）

となり，補題が成り立つ。 □

残るは $|e_3|=1$ の場合である。

補題11　1点で接する2有向定円 c_1，c_2 があり，$s(c_1,\ c_2)=e_3(|e_3|=1)$ とする。任意の2実数 e_1，e_2 が条件 $\sigma>0$ をみたすとき，つぎが成り立つ。

(a)　条件 $s(c_1,\ c_3)=e_2$，$s(c_2,\ c_3)=e_1$ をみたす有向円 c_3 は無数に存在する。

(b)　(a)の条件をみたす2つの有向円を c_3，c_3' とするとき

$$f(c_1)=c_1,\quad f(c_2)=c_2,\quad f(c_3)=c_3'$$

となる一般メビウス変換 f が存在する。

（証明）　2円 c_1，c_2 の接点を反転中心として反転させることにより2円は平行な2直線となる。そこで c_1，c_2 は E^2 上の y 軸と平行な有向2直線であると仮定しても一般性は失われない。ここでさらに c_3 も E^2 上の有向直線と仮定すると，c_1，c_2，c_3 が1点（無限遠点）で交わることになり補題5により $\sigma=0$ となり仮定と矛盾する。従って c_3 は E^2 上の円である。

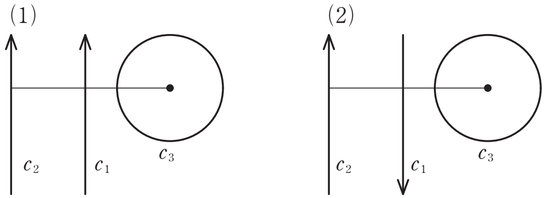

図 8　補題 11 の証明

(平行 2 直線 c_1, c_2 が同じ向き($e_3=-1$) のとき) 図 8(1)のように，c_1 を点 $(1, 0)$ を通り y 軸と平行で上向きの直線とし，c_2 を点 $(-1, 0)$ を通り y 軸と平行で上向きの直線とする。$e_3=-1$ なので

$$\sigma=e_1^2+e_2^2-2e_1e_2=(e_1-e_2)^2>0$$

となり $e_1-e_2\neq 0$ である。円 c_3 の中心の座標を (x, y)，符号つき半径を r とすると反転距離の定義により

$$\frac{x-1}{r}=e_2,\quad \frac{x+1}{r}=e_1$$

なので

$$r=\frac{2}{e_1-e_2},\quad x=\frac{e_1+e_2}{e_1-e_2}$$

となるので，2 数 e_1, e_2 が与えられたとき，r, x は一意に定まる。また y は任意であるため求める c_3 は無数に存在する。そのような 2 円を c_3, c_3' とするとき，c_3 を c_3' に移す y 軸方向の平行移動を f とする。このとき

$$f(c_1)=c_1,\quad f(c_2)=c_2,\quad f(c_3)=c_3'$$

となる。

（平行2直線 c_1, c_2 が逆向き $(e_3=1)$ のとき）図8(2)のように，c_1 を点 $(1,\ 0)$ を通り y 軸と平行で下向きの直線とし，c_2 を点 $(-1,\ 0)$ を通り y 軸と平行で上向きの直線と置くことができる。その後の計算は同様である。　□

（定理2の証明）　3実数 e_1, e_2, e_3 は $\sigma>0$ をみたすとする。このとき E^2_∞ 上の基準3円 c_1, c_2, c_3 で基準距離が $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ となるものの存在は，補題9(a), 10(a), 11(a)によりそれぞれ $|e_3|>1$, $|e_3|<1$, $|e_3|=1$ の3つの場合に分けて証明されている。　□

（定理3の証明）　$e_3=s(c_1,\ c_2)=s(c'_1,\ c'_2)$ なので定理1により

$$g(c_1)=c'_1,\quad g(c_2)=c'_2$$

となる一般メビウス変換 g が存在する。このとき $g(c_3)$ は

$$s(c'_1,\ g(c_3))=s(g(c_1),\ g(c_3))=s(c_1,\ c_3)=e_2$$
$$s(c'_2,\ g(c_3))=s(g(c_2),\ g(c_3))=s(c_2,\ c_3)=e_1$$

をみたす。従って補題9(b), 10(b), 11(b)によりすべての e_3 に対して

$$h(c'_1)=c'_1,\quad h(c'_2)=c'_2,\quad h(g(c_3))=c'_3$$

となる一般メビウス変換 h が存在する。そこで $f=h\circ g$ とおけば

$$f(c_1)=c'_1,\quad f(c_2)=c'_2,\quad f(c_3)=c'_3$$

が得られる。 □

定理2により$\sigma>0$となる任意の基準距離(e_1, e_2, e_3)に対して基準3円が無数に存在し，定理3によりそのような基準3円は常に一般メビウス変換で移り合うことができる。そのため基準距離(e_1, e_2, e_3)に対して標準となる基準3円を定めておくと今後の研究に好都合である。

最初に$|e_1|=|e_2|=|e_3|=1$の場合について検討する。基準距離中に含まれる-1の個数が奇数の場合は$\sigma=0$となるので，-1の数は0個と2個の場合について調べればよい。0個の場合は基準距離が$(1, 1, 1)$なのですでに論文[4]で詳しく調べている。2個の場合は，必要ならは基準3円の順番をいれかえることで基準距離は$(1, -1, -1)$としてよい。そのような基準3円をc_1, c_2, c_3とし，有向円cの算変座標を$[s_1, s_2, s_3]$とする。そこでc_1の向きを変えて$-c_1$とし基準3円を$-c_1, c_2, c_3$とすれば，基準距離は$(1, 1, 1)$でcの算変座標は$[-s_1, s_2, s_3]$となる。よって論文[4]で得られた結果が適用できる。従って$|e_1|=|e_2|=|e_3|=1$の場合については特に基準3円の標準形を用意する必要はないことになる。

つぎは$|e_1|=|e_2|=|e_3|=1$ではない場合についてであるが，必要ならは基準3円の順番を変えることで$|e_2|\neq 1$と仮定することができる。$|e_2|\neq 1$の場合の基準距離(e_1, e_2, e_3)に対応する基準3円として

$$c_1=L_0,\quad c_2=M^1_{e_3},\quad c_3=M^{r_3}_{e_2r_3}$$

をとる。$s(c_1, c_2)=e_3$, $s(c_1, c_3)=e_2$は明らかなので，条件$s(c_2, c_3)=e_1$をみたすには，符号つき半径r_3が

$$e_1=\frac{(e_2r_3-e_3)^2-r_3^2-1}{2r_3}$$

をみたす必要がある。整理すると 2 次方程式

$$(e_2^2-1)r_3^2-2(e_1+e_2e_3)r_3++(e_3^2-1)=0 \tag{8}$$

となり，その判別式は

$$\frac{D}{4}=(e_1+e_2e_3)^2-(e_2^2-1)(e_3^2-1)=\sigma>0$$

となる。従ってこの 2 次方程式は常に異なる 2 実解をもち，その一方は $r_3 \neq 0$ である。また，この基準 3 円の直交円 c_o は x 軸である。以上により基準 3 円の標準形をつぎのように定める。

定義 3　基準距離 $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ に対し記号 $u_1,\ u_2,\ u_3$ を

$$u_1=e_1+e_2e_3,\quad u_2=e_2^2-1,\quad u_3=e_3^2-1$$

と定める。このとき，$\sigma=u_1^2-u_2u_3$ である。

定義 4　$\sigma>0$ で $|e_2|\neq 1$ をみたす基準距離 $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ に対し

$$c_1=L_0,\quad c_2=M_{e_3}^1,\quad c_3=M_{e_2r_3}^{r_3}$$

を**基準 3 円の標準形**と呼ぶことにする。ただし $r_3\neq 0$ は 2 次方程式(8)すなわち

$$u_2r_3^2-2u_1r_3+u_3=0 \tag{9}$$

の解とする。また記号 p_1, p_2 を

$$p_1 = u_2 r_3 - u_1, \quad p_2 = u_1 r_3 - u_3$$

と定義する。

この標準形に関してはつぎの補題が成り立つ。

補題 12 $\sigma > 0$, $|e_2| \neq 1$ のときの基準3円の標準形に対して

$$p_1 r_3 - p_2 = 0, \quad p_1^2 = \sigma, \quad p_2^2 = \sigma r_3^2, \quad p_1 \neq 0, \quad p_2 \neq 0$$

が成り立つ。

(証明) 式(9)を変形すると $p_1 r_3 - p_2 = 0$ となる。また, p_1^2 を計算し途中で式(9)を用いると

$$\begin{aligned} p_1^2 &= (u_2 r_3 - u_1)^2 = u_2 (u_2 r_3^2) - 2u_1 u_2 r_3 + u_1^2 \\ &= u_2 (2u_1 r_3 - u_3) - 2u_1 u_2 r_3 + u_1^2 = u_1^2 - u_2 u_3 = \sigma \end{aligned}$$

となり, $p_2^2 = (p_1 r_3)^2 = \sigma r_3^2$ も明らかである。また $\sigma > 0$ で $r_3 \neq 0$ なので, $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$ となる。 □

6 算変座標の存在

この節では基準距離が (e_1, e_2, e_3) で $\sigma > 0$ である基準3円 c_1, c_2, c_3 が与えられているとする。このとき任意の3実数 s_1, s_2, s_3 に対して, 算変座標が $[s_1, s_2, s_3]$ である有向円 c が存在するかどうかについて考察する。常に存在す

れば好都合なのであるが実際にはそうならない。

基準距離が $(1, 1, 1)$ の場合については論文［4］の第4節で定理を2つ証明している。それらを1つにまとめるとつぎの定理となる。

定理4　基準距離が $(1, 1, 1)$ であるような基準3円を c_1, c_2, c_3 とする。また基準3円に直交する円を c_o とする。任意の実数 s_1, s_2, s_3 が与えられたとき，算変座標が $[s_1, s_2, s_3]$ である有向円 c が存在するための必要十分条件は

$$s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1+1 \geqq 0$$

である。また，等号成立条件は c と c_o が直交することである。

ここで記号 τ をつぎのように定義する。

定義5　基準距離 (e_1, e_2, e_3) と算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ に対して τ を

$$\begin{aligned}\tau = & 2(e_1+e_2e_3)s_2s_3+2(e_2+e_3e_1)s_3s_1+2(e_3+e_1e_2)s_1s_2 \\ & +(1-e_1^2)s_1^2+(1-e_2^2)s_2^2+(1-e_3^2)s_3^2\end{aligned}$$

と定義する。

これで準備ができたのでこの節の主定理を述べることにする。

定理5　基準3円 c_1, c_2, c_3 の基準距離を (e_1, e_2, e_3) とし $\sigma>0$ とする。また基準3円に直交する円を c_o とする。任意の実数 s_1, s_2, s_3 が与えられたとき，算変座標が $[s_1, s_2, s_3]$ である有向円 c が存在するための必要十分条件は

$$\sigma+\tau \geqq 0$$

である。また，等号成立条件は c と c_o が直交することである。

この定理を証明するために記号と補題を準備する。

定義 6　基準距離(e_1, e_2, e_3)と算変座標$[s_1, s_2, s_3]$に対して記号 v, w を

$$v = e_2 s_1 + s_3, \quad w = e_3 s_1 + s_2$$

と定める。

補題 13　基準距離(e_1, e_2, e_3)と算変座標$[s_1, s_2, s_3]$に対して

$$2u_1 vw - u_2 w^2 - u_3 v^2 = s_1^2 \sigma + \tau$$

が成り立つ。

(証明)　展開し両辺を比較するだけなので計算の詳細は省略する。　□

定義 7　$\sigma > 0$, $|e_2| \neq 1$ のときの基準3円の標準形と算変座標$[s_1, s_2, s_3]$に対して記号 z をつぎのように定める。

$$z = vr_3 - w$$

補題 14　$\sigma > 0$, $|e_2| \neq 1$ のときの基準3円の標準形に対しつぎが成り立つ。

(a)　E^2 上の有向円 c の中心を(x, y)とし符号つき半径を r とする。このと

き c の算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ に対して，$z \neq 0$ と $\sigma+\tau \geqq 0$ が成り立つ。また $\sigma+\tau=0$ となるのは $c \perp c_o$ のときである。

(b)　$z \neq 0$ と $\sigma+\tau \geqq 0$ をみたす s_1，s_2，s_3 に対し，

$$r=\frac{u_1 r_3-u_3}{z},\quad x=s_1 r,\quad y=\pm\frac{\sqrt{\sigma+\tau}\,r_3}{z}$$

とおくとき，中心が (x, y) で符号つき半径が r の有向円 c の算変座標は $[s_1, s_2, s_3]$ となる。

（証明）　基準 3 円の標準形を $c_1=L_0$，$c_2=M^1_{e_3}$，$c_3=M^{r_3}_{e_2 r_3}$ とする。最初に(a)を証明する。有向円 c の中心を (x, y) とし符号つき半径を r とする。このとき c の算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ は

$$s_1=\frac{x}{r},\quad s_2=\frac{(x-e_3)^2+y^2-1-r^2}{2r},\quad s_3=\frac{(x-e_2 r_3)^2+y^2-r_3^2-r^2}{2r_3 r}$$

となるので x を消去することで

$$\begin{aligned} y^2&=(1-s_1^2)r^2+2wr-u_3 \\ y^2&=(1-s_1^2)r^2+2vr_3 r-u_2 r_3^2 \end{aligned} \tag{10}$$

となる。この 2 式の差をとり式(9)を代入することで

$$zr=u_1 r_3-u_3=p_2$$

となる。補題 12 により $p_2 \neq 0$ なので $z \neq 0$ となる。従って

$$r=\frac{u_1 r_3-u_3}{z} \tag{11}$$

とすることができ，式⑽を式⑾と式(9)を用いて変形すると

$$
\begin{aligned}
y^2 &= (1-s_1^2)r^2+2wr-u_3 \\
&= \frac{1}{z^2}\left\{(1-s_1^2)(u_1r_3-u_3)^2+2w(vr_3-w)(u_1r_3-u_3)-u_3(vr_3-w)^2\right\} \\
&= \frac{1}{z^2}\left[\left\{(1-s_1^2)u_1^2+2u_1vw-u_3v^2\right\}r_3^2+\left\{(1-s_1^2)u_3+w^2\right\}(u_3-2u_1r_3)\right] \\
&= \frac{1}{z^2}\left\{(1-s_1^2)\sigma+2u_1vw-u_2w^2-u_3v^2\right\}r_3^2
\end{aligned}
$$

となり，ここで補題 13 により

$$
y^2 = \frac{1}{z^2}(\sigma+\tau)r_3^2 \tag{12}
$$

となる。従って $y^2 \geqq 0$，$z^2>0$，$r_3^2>0$ により $\sigma+\tau \geqq 0$ が得られる。また，$\sigma+\tau=0$ となるのは，$y=0$ より $c \perp c_o$ のときである。これで⒜の証明が完了する。

つぎに⒝を証明する。式

$$
r = \frac{u_1r_3-u_3}{z}, \quad x = s_1r, \quad y = \pm\frac{\sqrt{\sigma+\tau}\,r_3}{z}
$$

により式⑾と式⑿が成り立つ。従って⒜の証明での計算を逆に辿ることで，式⑿から式⑽の

$$
y^2 = (1-s_1^2)r^2+2wr-u_3
$$

が得られる。この式に $2zr = 2vr_3r-2wr = 2u_1r_3-2u_3$ と式(9)を用いることで

$$
y^2 = (1-s_1^2)r^2+2vr_3r-u_2r_3^2
$$

となる。そこで中心が $(x,\ y)$ で符号つき半径が r の円 c の算変座標 $[s_1',\ s_2',\ s_3']$ を計算すると

$$s_1' = \frac{x}{r} = s_1$$

$$\begin{aligned} s_2' &= \frac{(x-e_3)^2+y^2-1-r^2}{2r} \\ &= \frac{(s_1r-e_3)^2+\left\{(1-s_1^2)r^2+2wr-u_3\right\}-1-r^2}{2r} \\ &= \frac{2s_2r}{2r} = s_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3' &= \frac{(x-e_2r_3)^2+y^2-r_3^2-r^2}{2r_3r} \\ &= \frac{(s_1r-e_2r_3)^2+\left\{(1-s_1^2)r^2+2vr_3r-u_2r_3^2\right\}-r_3^2-r^2}{2r_3r} \\ &= \frac{2s_3r_3r}{2r_3r} = s_3 \end{aligned}$$

となり(b)の証明が完了する。 □

補題 15 $\sigma>0$, $|e_2|\neq 1$ のときの基準 3 円の標準形に対しつぎが成り立つ。

(a) E^2 上の有向直線 c の向きに沿った単位ベクトルを $\boldsymbol{u}=(a,\ b)$ とし原点 O と c の符号つき距離を h とする。このとき，c の算変座標 $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ に対して，$z=0$ と $\sigma+\tau\geqq 0$ が成り立つ。また $\sigma+\tau=0$ となるのは $c\perp c_o$ のときである。

(b) $z=0$ と $\sigma+\tau\geqq 0$ をみたす s_1, s_2, s_3 に対し，

$$a=\pm\sqrt{1-s_1^2},\quad b=-s_1,\quad h=w$$

とおくとき，向きが $\boldsymbol{u}=(a,\ b)$ で原点 O との符号つき距離が h の有向直

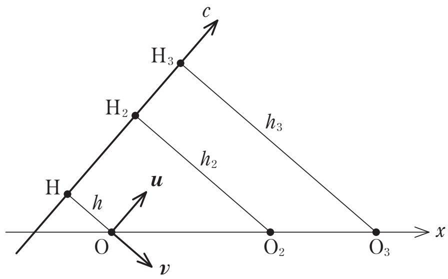

図9　補題15

線 c の算変座標は $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ となる。

(証明)　基準3円の標準形を $c_1 = L_0$, $c_2 = M^1_{e_3}$, $c_3 = M^{r_3}_{e_2 r_3}$ とする。最初に(a)を証明する。図9のように有向直線 c の向きに沿った単位ベクトルを $\boldsymbol{u} = (a,\ b)$, $\boldsymbol{u}$ を $-90°$ 回転させたベクトルを $\boldsymbol{v} = (b,\ -a)$, c から原点Oまでの符号つき距離を h とする。また, c から2円 c_2, c_3 の中心 O_2, O_3 までの符号つき距離をそれぞれ h_2, h_3 とする。3点O, O_2, O_3 から c に引いた垂線の足をそれぞれH, H_2, H_3 とする。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{HO}} = h\,\boldsymbol{v}, \quad \overrightarrow{\mathrm{H_2O_2}} = h_2\boldsymbol{v}, \quad \overrightarrow{\mathrm{H_3O_3}} = h_3\boldsymbol{v}$$

となり, O_2, O_3 の x 座標がそれぞれ e_3, $e_2 r_3$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OO_2}} \cdot \boldsymbol{v} = be_3 = h_2 - h, \quad \overrightarrow{\mathrm{OO_3}} \cdot \boldsymbol{v} = be_2 r_3 = h_3 - h$$

となり, $h_2 = h + be_3$, $h_3 = h + be_2 r_3$ が得られる。従って c の算変座標 $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ は

$$s_1=-b,\quad s_2=h_2=h+be_3,\quad s_3=\frac{h_3}{r_3}=\frac{h+be_2r_3}{r_3} \tag{13}$$

となるので，整理することで

$$b=-s_1,\quad h=w,\quad h=vr_3$$

となる。従って

$$z=vr_3-w=0 \tag{14}$$

が得られる。式(9)を v^2 倍した式に(14)を代入することで

$$2u_1vw-u_2w^2-u_3v^2=0$$

となるので補題13により $s_1^2\sigma+\tau=0$ となる。従って $|s_1|\leqq 1$ により

$$\sigma+\tau=\sigma-s_1^2\sigma=(1-s_1^2)\sigma\geqq 0$$

が得られる。また，$\sigma+\tau=0$ となるのは，$|s_1|=|b|=1$ より $c\perp c_o$ のときである。これで(a)の証明が完了する。

つぎに(b)を証明する。$z=0$ により式(14)が成り立つので，上と同様にして $s_1^2\sigma+\tau=0$ となる。従って $\sigma+\tau\geqq 0$ により

$$(1-s_1^2)\sigma=\sigma-s_1^2\sigma=\sigma+\tau\geqq 0$$

となり，$|s_1|\leqq 1$ を得る。ここで

$$a = \pm\sqrt{1-s_1^2},\quad b = -s_1,\quad h = w$$

とおき $\boldsymbol{u} = (a,\ b)$ と h により有向直線 c を定めたので，c の算変座標 $[s_1',\ s_2',\ s_3']$ は図 9 と式⒀を用いると

$$\begin{aligned} s_1' &= -b = s_1 \\ s_2' &= h + be_3 = w - s_1e_3 = s_2 \\ s_3' &= \frac{h + be_2r_3}{r_3} = \frac{w - e_2s_1r_3}{r_3} = \frac{vr_3 - e_2s_1r_3}{r_3} = s_3 \end{aligned}$$

となり⒝の証明が完了する。 □

この証明の中で導いた結果を補題としてまとめる。

補題 16　$\sigma > 0$，$|e_2| \neq 1$ のときの基準 3 円の標準形と算変座標 $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ に対し，$z = vr_3 - w = 0$ ならば $s_1^2\sigma + \tau = 0$ が成り立つ。

それでは定理 5 の証明にとりかかる。

（定理 5 の証明）　前節で述べたように，基準距離が $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$ のときは基準距離が $(1,\ 1,\ 1)$ と $(1,\ -1,\ -1)$ の 2 つの場合について調べればよい。前者については定理 4 により明らかである。後者の基準距離が $(1,\ -1,\ -1)$ の場合は，

$$\sigma + \tau = 4(1 + s_2s_3 - s_3s_2 - s_1s_2) \geqq 0 \tag{15}$$

を導けばよいことになる。基準 3 円 c_1，c_2，c_3 の c_1 の向きを変えた $-c_1$，c_2，c_3 を基準 3 円とすることで基準距離が $(1,\ 1,\ 1)$ となり定理 4 を用いることがで

きる。このとき c の算変座標は $[-s_1, s_2, s_3]$ となるので定理4にあてはめると⒂を得ることができる。

従って残るのは，必要ならば基準3円の順番を入れ替えることで，$|e_2|\neq 1$ の場合である。その場合は基準3円の標準形

$$c_1 = L_0, \quad c_2 = M^1_{e_3}, \quad c_3 = M^{r_3}_{e_2 r_3}$$

を用いて議論すればよいので補題14と補題15により証明は完了している。

7　距　離　公　式

この節では距離公式を取り上げる。基準距離が $(1, 1, 1)$ の場合については論文［3］の第9節でつぎの定理を証明している。

定理6（基準3円が互いに接する場合の距離公式）　E^2_∞ 上の基準3円 c_1, c_2, c_3 が互いに接していて基準距離が $(1, 1, 1)$ とする。2有向円 c_s, c_t の算変座標をそれぞれ $[s_1, s_2, s_3]$，$[t_1, t_2, t_3]$ とし $x = s(c_s, c_t)$ とする。このとき x はつぎの2次方程式

$$4x^2 - 4\rho x + \rho^2 - 4\tau_s\tau_t = 0$$

をみたし，その解の公式は

$$x = \frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\tau_s\tau_t}$$

である。ここで

$$\rho = s_1t_2 + s_2t_1 + s_2t_3 + s_3t_2 + s_3t_1 + s_1t_3$$
$$\tau_s = 1 + s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1$$
$$\tau_t = 1 + t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$$

とする。

一般の場合のつぎの定理は論文［3］では公式を紹介しただけで証明はしていなかった。その後証明方法が見つかったので，ここでは証明も与える。

計算式を簡潔に記述するために，変数 x_i，y_i $(i=1, 2, 3)$ に対して記号 $\hat{x}_i$，$\widehat{xy}_i$ $(i=1, 2, 3)$ をつぎのように定める。

$$\hat{x}_1 = x_2x_3, \quad \hat{x}_2 = x_3x_1, \quad \hat{x}_3 = x_1x_2$$
$$\widehat{xy}_1 = x_2y_3 + x_3y_2, \quad \widehat{xy}_2 = x_3y_1 + x_1y_3, \quad \widehat{xy}_3 = x_1y_2 + x_2y_1$$

この記号を用いるとき定義5の τ は

$$\tau = \sum_{i=1}^{3}\left\{2(e_i + \hat{e}_i)\hat{s}_i + (1 - e_i^2)s_i^2\right\}$$

と表すことができる。

定理7（距離公式） E_∞^2 上の基準3円 c_1，c_2，c_3 の基準距離を (e_1, e_2, e_3) とし $\sigma > 0$ とする。2円 c_s，c_t の算変座標をそれぞれ $[s_1, s_2, s_3]$，$[t_1, t_2, t_3]$ とするとき，$x = s(c_s, c_t)$ はつぎの2次方程式

$$\sigma^2x^2 - 2\sigma\rho x + \rho^2 - (\sigma + \tau_s)(\sigma + \tau_t) = 0$$

をみたし，その解の公式は

$$x=\frac{\rho\pm\sqrt{(\sigma+\tau_s)(\sigma+\tau_t)}}{\sigma}$$

である。ここで

$$\rho=\sum_{i=1}^{3}\left\{\widehat{st}_i(\hat{e}_i+e_i)+s_it_i(1-e_i^2)\right\}$$

$$\tau_s=\sum_{i=1}^{3}\left\{2\hat{s}_i(\hat{e}_i+e_i)+s_i^2(1-e_i^2)\right\}$$

$$\tau_t=\sum_{i=1}^{3}\left\{2\hat{t}_i(\hat{e}_i+e_i)+t_i^2(1-e_i^2)\right\}$$

とする。

この定理の証明では2つの算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ と $[t_1, t_2, t_3]$ を同時に扱う必要がある。そのため前節で用いた記号を少し修正する必要がある。定理中の τ_s と τ_t は定義5の τ をそれぞれ2つの算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$，$[t_1, t_2, t_3]$ に当てはめたものである。

$\sigma>0$，$|e_2|\neq 0$ のときの基準3円の標準形のもとで，c_s，c_t の算変座標をそれぞれ $[s_1, s_2, s_3]$，$[t_1, t_2, t_3]$ とするとき，定義6の記号 v，w は区別のために

$$v_s=e_2s_1+s_3,\quad w_s=e_3s_1+s_2,\quad v_t=e_2t_1+t_3,\quad w_t=e_3t_1+t_2$$

と表すことにする。また定義7の記号 z についても

$$z_s=v_sr_3-w_s,\quad z_t=v_tr_3-w_t$$

と表記する。

補題 17　$\sigma>0$, $|e_2|\neq 1$ のときの基準 3 円の標準形と算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$, $[t_1, t_2, t_3]$ に対して

$$(t_1^2\sigma+\tau_t)z_s^2-2(s_1t_1\sigma+\rho)z_sz_t+(s_1^2\sigma+\tau_s)z_t^2=0$$

が成り立つ。

（証明）　つぎの式

$$\begin{aligned}&(t_1^2\sigma+\tau_t)z_s^2-2(s_1t_1\sigma+\rho)z_sz_t+(s_1^2\sigma+\tau_s)z_t^2\\&\quad=-(u_2r_3^2-2u_1r_3+u_3)\{e_2(s_1t_2-s_2t_1)+e_3(s_3t_1-s_1t_3)+s_3t_2-s_2t_3\}^2\end{aligned}$$

が成り立つことは，記号の定義に従い展開し両辺を比較するだけなので詳細は省略する。式(9)により右辺が 0 となるので補題が成立する。　□

補題 18　$\sigma>0$, $|e_2|\neq 1$ のときの基準 3 円の標準形と算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$, $[t_1, t_2, t_3]$ に対して

(a)　$z_t=0$ のとき $s_1t_1\sigma+\rho=v_tz_sp_1$ が成り立ち，

(b)　$z_s=z_t=0$ のとき $s_1t_1\sigma+\rho=0$ が成り立つ。

（証明）　つぎの式

$$s_1t_1\sigma+\rho=-u_2w_sw_t+u_1(v_sw_t+v_tw_s)-u_3v_sv_t$$

が成り立つことは，記号の定義に従い両辺を展開し比較するだけなので詳細は省略する。$z_t=0$ のとき $w_t=v_tr_3$ と補題 12 を用いて右辺を計算すると

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= -u_2 w_s v_t r_3 + u_1 (v_s v_t r_3 + v_t w_s) - u_3 v_s v_t \\
&= v_t v_s (u_1 r_3 - u_3) - v_t w_s (u_2 r_3 - u_1) = v_t v_s p_2 - v_t w_s p_1 \\
&= v_t v_s p_1 r_3 - v_t w_s p_1 = v_t z_s p_1
\end{aligned}
$$

となり(a)を得る。さらに，$z_s = 0$ を仮定すると（右辺）$=0$ となり(b)を得る。□

（定理 7 の証明）　基準距離が $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$ の場合は定理 5 の証明の冒頭と同じ論法を取ることで定理 6 に帰着させることができる。

　その他の場合は，必要ならば基準 3 円の順番を入れ替えることで，$|e_2| \neq 1$ を仮定してよい。そこで，基準 3 円の標準形を

$$c_1 = L_0, \quad c_2 = M^1_{e_3}, \quad c_3 = M^{r_3}_{e_2 r_3}$$

とし，$r_3 \neq 0$ は 2 次方程式(9)の解とする。また補題 12 により

$$p_2 = u_1 r_3 - u_3 \neq 0$$

である。

　ここでさらに記号を導入して

$$\upsilon_s = \sqrt{\sigma + \tau_s}, \quad \upsilon_t = \sqrt{\sigma + \tau_t}$$

とする。この後は，有向円 c_s，c_t が E^2 上の円か直線かで場合分けする。

（c_s，c_t がともに E^2 上の円の場合）　c_s の中心を (x_s, y_s) とし符号つき半径を r_s とする。c_t の中心を (x_t, y_t) とし符号つき半径を r_t とする。このとき補題 14 により

$$r_s=\frac{p_2}{z_s},\quad x_s=s_1r_s=\frac{s_1p_2}{z_s},\quad y_s=\pm\frac{\upsilon_s r_3}{z_s}$$
$$r_t=\frac{p_2}{z_t},\quad x_t=t_1r_t=\frac{t_1p_2}{z_t},\quad y_t=\pm\frac{\upsilon_t r_3}{z_t}$$

となる。距離公式として求めたい $x=s(c_s, c_t)$ は

$$\begin{aligned}
x&=\frac{(x_s-x_t)^2+(y_s-y_t)^2-r_s^2-r_t^2}{2r_sr_t}\\
&=\frac{\left(\frac{s_1p_2}{z_s}-\frac{t_1p_2}{z_t}\right)^2+\left(\frac{\upsilon_sr_3}{z_s}\pm\frac{\upsilon_tr_3}{z_t}\right)^2-\frac{p_2^2}{z_s^2}-\frac{p_2^2}{z_t^2}}{\frac{2p_2^2}{z_sz_t}}\\
&=\frac{(s_1z_t-t_1z_s)^2p_2^2+(\upsilon_sz_t\pm\upsilon_tz_s)^2r_3^2-(z_s^2+z_t^2)p_2^2}{2z_sz_tp_2^2}\\
&=\frac{\left\{(t_1^2-1)z_s^2-2s_1t_1z_sz_t+(s_1^2-1)z_t^2\right\}p_2^2+(\upsilon_sz_t\pm\upsilon_tz_s)^2r_3^2}{2z_sz_tp_2^2}
\end{aligned}$$

である。ここで補題 12 により $p_2^2=\sigma r_3^2$ が成り立つので,

$$\begin{aligned}
x&=\frac{\left\{(t_1^2-1)z_s^2-2s_1t_1z_sz_t+(s_1^2-1)z_t^2\right\}\sigma+(\upsilon_sz_t\pm\upsilon_tz_s)^2}{2z_sz_t\sigma}\\
&=\frac{\left\{t_1^2z_s^2-2s_1t_1z_sz_t+s_1^2z_t^2\right\}\sigma+\tau_sz_t^2+\tau_tz_s^2\pm2\upsilon_s\upsilon_tz_sz_t}{2z_sz_t\sigma}\\
&=\frac{(t_1^2\sigma+\tau_t)z_s^2-2s_1t_1\sigma z_sz_t+(s_1^2\sigma+\tau_s)z_t^2}{2z_sz_t\sigma}\pm\frac{\upsilon_s\upsilon_t}{\sigma}
\end{aligned}$$

となる。補題 17 を用いることで

$$(t_1^2\sigma+\tau_t)z_s^2-2s_1t_1\sigma z_sz_t+(s_1^2\sigma+\tau_s)z_t^2=2\rho z_sz_t$$

となる。これを代入することにより

$$x=\frac{2\rho z_s z_t}{2z_s z_t \sigma}\pm\frac{v_s v_t}{\sigma}=\frac{\rho}{\sigma}\pm\frac{v_s v_t}{\sigma}=\frac{\rho\pm\sqrt{(\sigma+\tau_s)(\sigma+\tau_t)}}{\sigma}$$

が得られる。

（c_s，c_t は E^2 上で一方が円で他方が直線の場合） c_s が円で c_t が直線とする。c_s の中心が $\mathrm{O}_s(x_s,\ y_s)$ で符号つき半径が r_s の円とすれば上と同様にして

$$r_s=\frac{p_2}{z_s},\quad x_s=\frac{s_1 p_2}{z_s},\quad y_s=\pm\frac{v_s r_3}{z_s}$$

となる。c_t が直線のときは補題15により c_t の向きに沿った単位ベクトルを $\boldsymbol{u}_t=(a_t,\ b_t)$，$c_t$ と原点の符号つき距離を h_t とするとき，

$$a_t=\pm\sqrt{1-t_1^2},\quad b_t=-t_1,\quad h_t=w_t$$

となる。 ここで $\boldsymbol{u}_t$ を $-90°$ 回転させたベクトルを $\boldsymbol{v}_t=(b_t,\ -a_t)$ とするとき，$x=s(c_s,\ c_t)$ は

$$\begin{aligned}x&=\frac{h_t+\overrightarrow{\mathrm{OO}_s}\cdot\boldsymbol{v}_t}{r_s}=\frac{h_t+b_t x_s-a_t y_s}{r_s}\\&=\frac{w_t-\dfrac{s_1 t_1 p_2}{z_s}\pm\dfrac{\sqrt{1-t_1^2}\,v_s r_3}{z_s}}{\dfrac{p_2}{z_s}}\\&=\frac{w_t z_s-s_1 t_1 p_2\pm\sqrt{(1-t_1^2)(\sigma+\tau_s)}\,r_3}{p_2}\end{aligned}$$

となる。ここで右辺の分母分子に p_2 を掛けて，$z_t=0$ により $w_t=v_t r_3$ であること，補題12の $p_2^2=\sigma r_3^2$，$p_2=p_1 r_3$，さらに補題16により $(1-t_1^2)\sigma=(\sigma+\tau_t)$ であることを用いると

$$x=\frac{\nu_t z_s p_1 r_3^2-s_1 t_1 \sigma r_3^2 \pm \sqrt{(\sigma+\tau_s)(\sigma+\tau_t)}\,r_3^2}{\sigma r_3^2}$$
$$=\frac{\nu_t z_s p_1-s_1 t_1 \sigma \pm \sqrt{(\sigma+\tau_s)(\sigma+\tau_t)}}{\sigma}$$

最後に補題18(a)を用いると

$$x=\frac{\rho \pm \sqrt{(\sigma+\tau_s)(\sigma+\tau_t)}}{\sigma}$$

が得られる。

(c_s, c_t がともに E^2 上の直線の場合) c_s の向きに沿った単位ベクトルを $\boldsymbol{u}_s=(a_s, b_s)$, c_t の向きに沿った単位ベクトルを $\boldsymbol{u}_t=(a_t, b_t)$ とすれば, 補題15により

$$a_s=\pm\sqrt{1-s_1^2},\quad b_s=-s_1,\quad a_t=\pm\sqrt{1-t_1^2},\quad b_t=-t_1$$

となる。このとき $x=s(c_s, c_t)$ は

$$x=-(a_s, b_s)\cdot(a_t, b_t)=-s_1 t_1 \pm \sqrt{(1-s_1^2)(1-t_1^2)}$$
$$=\frac{-s_1 t_1 \sigma \pm \sqrt{(1-s_1^2)\sigma(1-t_1^2)\sigma}}{\sigma}$$

となる。ここで, $z_s=z_t=0$ なので補題16と補題18により

$$x=\frac{\rho \pm \sqrt{(\sigma+\tau_s)(\sigma+\tau_t)}}{\sigma}$$

となる。以上により定理7の証明は完了する。 □

距離公式も解は2つあるので，そのどちらを選択するかについて補足する。ここでも基準3円の直交円 c_o が大事な役割を果たす。図10の(1)において，算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ をもつ2円を c_s，$-c_s'$ とし，算変座標 $[t_1, t_2, t_3]$ をもつ2円を c_t，$-c_t'$ とするとき，c_s と c_s' は c_o により互いに反転で，c_t と c_t' も c_o により互いに反転である。この図(1)の c_o が直線になるように一般メビウス変換で移した図が(2)である。(2)においては c_s と $-c_s'$ は同じ符号つき半径をもち，c_t と $-c_t'$ も同じ符号つき半径をもつ。従って，距離公式の2解を $|x_1|<|x_2|$ とするとき反転距離の計算式から

$$|x_1|=|s(c_s, c_t)|=|s(-c_s', -c_t')|<|s(c_s, -c_t')|=|s(-c_s', c_t)|=|x_2|$$

となることは明らかである。この関係式は(1)の図に対してももちろん成立する。このことから反転距離を求めたい2円が，c_o の同じ側にあれば2解の絶対値の小さい方の x_1 を選択し，c_o の異なる側にあれば大きい方の x_2 を選択すればよいことが分かる。

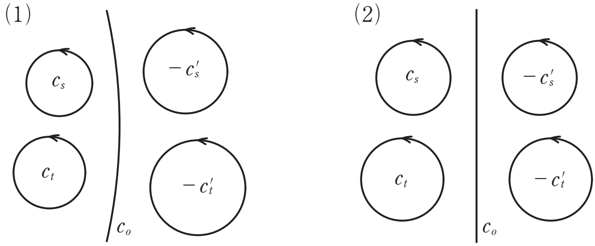

図10　距離公式の2解

8　半　径　公　式

つぎに有向円 c の算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ が与えられたとき，その円の符号つき半径 r を求める公式を作ることにする。論文［3］の定理5では式を十分に

整理できていなかったが，その定理の改訂版である。

定理 8（半径公式） 基準3円を E^2 上の3有向円 c_1，c_2，c_3（符号つき半径はそれぞれ r_1，r_2，r_3）とし基準距離が $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ で $\sigma > 0$ とする。E^2 上の有向円 c の算変座標を $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ とするとき，円 c の符号つき半径 r はつぎの2次方程式

$$\{\varkappa^2 - (\sigma + \tau)\lambda\} r^2 - 2\sigma\varkappa r_1 r_2 r_3 r + \sigma^2 r_1^2 r_2^2 r_3^3 = 0$$

で求まり，その解の公式は

$$r = \frac{\sigma r_1 r_2 r_3}{\varkappa \pm \sqrt{(\sigma + \tau)\lambda}}$$

である。ここで

$$\varkappa = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \widehat{es}_i \hat{r}_i + e_i s_i r_i \widehat{er}_i + (1 - e_i^2) s_i \hat{r}_i \right\}$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{3} \left\{ 2 r_1 r_2 r_3 (e_i + \hat{e}_i) r_i + (1 - e_i^2) \hat{r}_i^2 \right\}$$

とする。

（証明） 基準3円の中心をそれぞれ O_1，O_2，O_3，円 c の中心を O とするとき，反転距離の定義により

$$\mathrm{OO}_1^2 = r^2 + r_1^2 + 2rr_1 s_1, \quad \mathrm{OO}_2^2 = r^2 + r_2^2 + 2rr_2 s_2, \quad \mathrm{OO}_3^2 = r^2 + r_3^2 + 2rr_3 s_3,$$

$$\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2e_3 r_1 r_2, \quad \mathrm{O}_2\mathrm{O}_3^2 = r_2^2 + r_3^2 + 2e_1 r_2 r_3, \quad \mathrm{O}_3\mathrm{O}_1^2 = r_3^2 + r_1^2 + 2e_2 r_3 r_1$$

と表すことができるので，４点O，O_1，O_2，O_3 の距離に六斜術（[3] の定理１）を適用することで，関係式

$$K(\mathrm{OO}_1,\ \mathrm{OO}_2,\ \mathrm{OO}_3;\ \mathrm{O}_2\mathrm{O}_3,\ \mathrm{O}_3\mathrm{O}_1,\ \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2) = 0$$

が得られる。これは10変数 r，r_1，r_2，r_3，e_1，e_2，e_3，s_1，s_2，s_3 の間の関係式である。それを r について整理すると定理の式が得られる。詳細は省略する。 □

この半径公式で得られた１つの符号つき半径 r に対して，論文 [3] で円 c の中心位置が一意に定まると書いているが，不正確だったのでここで修正する。正しくは，基準３円の直交円 c_o が E^2 上の円の場合は r に対して c の中心は一意に定まるが，c_o が E^2 上の直線の場合は半径公式から得られる r は重解となり，そのとき c の中心位置は c_o に関して線対称な２点となる。

半径公式のルートの中の式 $\sigma+\tau$ は定理５により $\sigma+\tau \geqq 0$ である。また，$\lambda \geqq 0$ についてはつぎの補題である。

補題 19 定理８の基準３円の中心のなす三角形 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ の面積を S とするとき，

$$\lambda = 4S^2 \geqq 0$$

である。

（証明） 三角形 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ の３辺 a，b，c を

$$a^2 = \mathrm{O}_2\mathrm{O}_3{}^2 = r_2^2 + r_3^2 + 2e_1r_2r_3$$
$$b^2 = \mathrm{O}_3\mathrm{O}_1{}^2 = r_3^2 + r_1^2 + 2e_2r_3r_1$$
$$c^2 = \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2{}^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2e_3r_1r_2$$

とおき，ヘロンの公式

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\quad s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

より

$$16S^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$$

となる。これを計算することで

$$16S^2=4\lambda$$

を得る。また3点 O_1，O_2，O_3 は一直線上に並ぶこともあるので $S=0$ となる場合もある。従って $\lambda=4S^2\geqq 0$ である。 □

つぎに基準3円の1つが直線の場合の半径公式である。

定理9（基準3円の1つが直線の場合の半径公式） 基準3円が E^2 上の2有向円 c_1，c_2（符号つき半径はそれぞれ r_1，r_2）と E^2 上の有向直線 c_3 からなり基準距離が $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ で $\sigma>0$ とする。E^2 上の有向円 c の算変座標を $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ とするとき，円 c の符号つき半径 r はつぎの2次方程式

$$\{\varkappa^2-(\sigma+\tau)\lambda\}r^2-2\sigma\varkappa r_1r_2r+\sigma^2r_1^2r_2^2=0$$

で求まり，その解の公式は

$$r=\frac{\sigma r_1r_2}{\varkappa\pm\sqrt{(\sigma+\tau)\lambda}}$$

である。ここで

$$\varkappa = \left\{(e_3 + e_1 e_2)s_1 + (1 - e_2^2)s_2 + (e_1 + e_2 e_3)s_3\right\} r_1 \\ + \left\{(1 - e_1^2)s_1 + (e_3 + e_1 e_2)s_2 + (e_2 + e_3 e_1)s_3\right\} r_2$$

$$\lambda = (1 - e_2^2)r_1^2 + 2(e_3 + e_1 e_2)r_1 r_2 + (1 - e_1^2)r_2^2$$

とする。

（証明）　定理8の式で $r_3 \to \infty$ として極限をとればよい。そこで

$$r = \frac{\sigma r_1 r_2 r_3}{\varkappa \pm \sqrt{(\sigma + \tau)\lambda}}$$

の右辺の分子を r_3 で割ると $r_1 r_2 \sigma$ となる。また，分母の $\varkappa$ を r_3 で割り極限をとると

$$\frac{\varkappa}{r_3} \to \left\{(e_3 + e_1 e_2)s_1 + (1 - e_2^2)s_2 + (e_1 + e_2 e_3)s_3\right\} r_1 \\ + \left\{(1 - e_1^2)s_1 + (e_3 + e_1 e_2)s_2 + (e_2 + e_3 e_1)s_3\right\} r_2$$

となり，分母の λ を r_3^2 で割り極限をとると

$$\frac{\lambda}{r_3^2} \to (1 - e_2^2)r_1^2 + 2(e_3 + e_1 e_2)r_1 r_2 + (1 - e_1^2)r_2^2$$

となる。　□

　つぎに基準3円の2つが直線の場合の半径公式である。

定理 10（基準 3 円の 2 つが直線の場合の半径公式）　基準 3 円が E^2 上の有向円 c_1（符号つき半径は r_1）と E^2 上の 2 有向直線 c_2, c_3 からなりその基準距離が (e_1, e_2, e_3) で $\sigma > 0$ とする。E^2 上の有向円 c の算変座標を $[s_1, s_2, s_3]$ とする。このとき，円 c の符号つき半径 r はつぎの 2 次方程式

$$\{\varkappa^2 - (\sigma + \tau)\lambda\}r^2 - 2\sigma\varkappa r_1 r + \sigma^2 r_1^2 = 0$$

で求まり，その解の公式は

$$r = \frac{\sigma r_1}{\varkappa \pm \sqrt{(\sigma + \tau)\lambda}}$$

である。ここで

$$\varkappa = (1 - e_1^2)s_1 + (e_3 + e_1 e_2)s_2 + (e_2 + e_3 e_1)s_3$$
$$\lambda = (1 - e_1^2)$$

とする。

（証明）　定理 9 の証明と同様にして，定理 9 の式の極限 $r_2 \to \infty$ をとればよいので計算は省略する。

　基準 3 円がすべて直線の場合は $\sigma = 0$ となるので公式は存在しない。以下は定理 8 , 定理 9 , 定理 10 の半径公式を基準距離が $(1, 1, 1)$ の場合に限定したものである。証明は元となる定理に $e_1 = e_2 = e_3 = 1$, $\sigma = 4$, $\tau = 4(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1)$ を代入して整理するだけなので省略する。

定理11（互いに接する基準3円の半径公式）　基準距離が$(1, 1, 1)$である基準3円をE^2上の3有向円c_1，c_2，c_3（符号つき半径はそれぞれr_1，r_2，r_3）とする。E^2上の有向円cの算変座標$[s_1, s_2, s_3]$が与えられたとき，円cの符号つき半径rは2次方程式

$$(p^2-4q)r^2-4pr_1r_2r_3r+4r_1^2r_2^2r_3^2=0$$

で求まり，解の公式は

$$r=\frac{2r_1r_2r_3}{p\pm2\sqrt{q}}$$

である。ここで，

$$p=r_1(r_2+r_3)s_1+r_2(r_3+r_1)s_2+r_3(r_1+r_2)s_3$$
$$q=r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)(1+s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1)$$

とする。

定理12（互いに接する基準3円の1つが直線の場合の半径公式）　基準距離が$(1, 1, 1)$である基準3円をE^2上の2有向円c_1，c_2（符号つき半径はそれぞれr_1，r_2）と有向直線c_3とする。E^2上の有向円cの算変座標$[s_1, s_2, s_3]$が与えられたとき，円cの符号つき半径rは2次方程式

$$(p^2-4q)r^2-4pr_1r_2r+4r_1^2r_2^2=0$$

で求まり，解の公式は

$$r=\frac{2r_1r_2}{p\pm2\sqrt{q}}$$

である。ここで,

$$p=(s_1+s_3)r_1+(s_2+s_3)r_2$$
$$q=r_1r_2(1+s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1)$$

とする。

定理 13（互いに接する基準 3 円の 2 つが直線の場合の半径公式） 基準距離が (1, 1, 1) である基準3円を E^2 上の有向円 c_1（符号つき半径は r_1）と 2 有向直線 c_2, c_3 とする。E^2 上の有向円 c の算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ が与えられたとき，円 c の符号つき半径 r は

$$r=\frac{2r_1}{s_2+s_3}$$

である。

この定理 13 の 2 有向直線 c_2, c_3 は平行で向きの異なる 2 直線である。また基準 3 円の直交円 c_o は円 c_1 と 2 直線 c_2, c_3 との 2 接点を結ぶ直線である。

9　応　　用

この節では基準 3 円の 1 つが直線となるような例を取り上げる。

9.1　y 軸対称な問題への応用

この問題は田部井氏の［2］にある問題で，出典は続神壁算法とある。

例題 1　図 11 のように外円内に 7 円を容れる。円 c_1 の半径が r_1，円 c_2 の半径が r_2 のとき円 c の半径 r を求めよ。ただし，2 円 a_1，a_2 の半径は等しく，2 円 b_1，b_2 の半径も等しいとする。

c_1，c_2 を基準 3 円に含めるのは当然として，c_3 を何にするかである。問題が y 軸（c_1，c_2 の中心を結ぶ直線を y 軸とする）対称なので，このような問題に対しては y 軸を c_3 と定めるとよい。

定義 8　図 12 のように c_1 と c_2 は共有点をもたない E^2 の有向円で，c_3 は c_1，c_2 に直交する E^2 の直線とする。このとき基準距離は $(0,\ 0,\ e_3)$，$|e_3|>1$ で $\sigma=e_3^2-1>0$ である。このような基準 3 円を**串型基準 3 円**と呼ぶことにする。

2 円 c_1，c_2 の向きは反時計回り，直線 c_3 は上向きとして基準 3 円を定める。また，求める円 c の算変座標は $[s_1,\ s_2,\ 0]$ の形をしているので，定理 9 の半径公式に基準距離 $(0,\ 0,\ e_3)$ と算変座標 $[s_1,\ s_2,\ 0]$ を代入することで

$$\varkappa=(e_3s_1+s_2)r_1+(e_3s_2+s_1)r_2$$

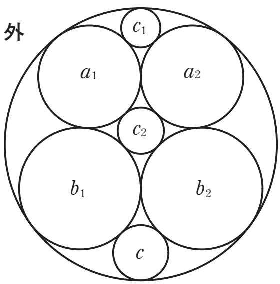

図 11　例題 1

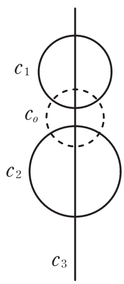

図 12　串型基準 3 円

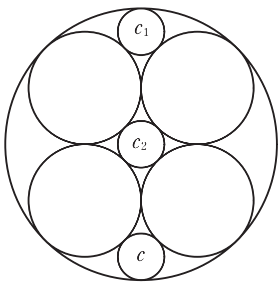

図 13　同心円化

$$\lambda = r_1^2 + 2e_3 r_1 r_2 + r_2^2$$
$$\tau = s_1^2 + 2e_3 s_1 s_2 + s_2^2$$
$$r = \frac{\sigma r_1 r_2}{\varkappa \pm \sqrt{(\sigma+\tau)\lambda}}$$

となる。この問題を解くには

$$e_3 = s(c_1,\ c_2),\quad s_1 = s(c_1,\ c),\quad s_2 = s(c_2,\ c)$$

を計算すればよい。

そのために，一般メビウス変換で外円と c_2 が同心円になるように図13に変換する[1]。外円の半径を1とおけば簡単な計算により，4等円の半径は $\sqrt{2}-1$ で，3円 c_1，c_2，c の半径はともに $3-2\sqrt{2}$ となる。従って

$$e_3 = 5+4\sqrt{2},\quad s_1 = 23+16\sqrt{2},\quad s_2 = 5+4\sqrt{2}$$

となる。これを半径公式に代入することで，

$$\begin{aligned} \sigma &= 8(7+5\sqrt{2}) \\ \varkappa &= 8(7+5\sqrt{2})\left\{(3+\sqrt{2})r_1 + \sqrt{2}r_2\right\} \\ \sqrt{\sigma+\tau} &= 8(7+5\sqrt{2}) \\ \lambda &= r_1^2 + 2(5+4\sqrt{2})r_1 r_2 + r_2^2 \end{aligned}$$

となり

1) 外円と c_2 が生成する双曲型円束の2焦点のうち c_2 の内部にある点を反転中心として反転させて同心円に移した後に，今度はその同心円の中心を反転中心としてもう一度反転することでこの図が得られる。

$$r=\frac{r_1r_2}{(3+\sqrt{2})r_1+\sqrt{2}r_2-\sqrt{r_1^2+2(5+4\sqrt{2})r_1r_2+r_2^2}}$$

が得られる。

2次方程式の解の公式の $\pm$ のどちらを選ぶかは，2節の最後で説明したように基準3円の直交円 c_o がその解決策となる。この問題の場合は求める円 c は c_o の外側にあるので半径公式の2解のもう一方は c_o の内側にあることになる。従ってこの問題の場合は $|r|$ の大きい方を選べばよいことになる。

串型基準3円として c_1，c_2 が共有点を持たない場合を扱った。c_1，c_2 が2交点を持つ場合は $\sigma<0$ となるのでこの論文の範囲外である。c_1，c_2 が接する場合は y 軸を c_3 とすると $\sigma=0$ となってしまうが，そのような例は論文［3］の例題5ですでに扱っていて，y 軸対称で互いに接する基準3円を選ぶことで対処できる。

9.2　接する2円と共通外接線からなる例

この問題も田部井氏の［2］にある問題である。

例題2　図14において c_3 を直線とする。円 c_1，c_2，c_s の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_s とするとき円 c_t の半径 r_t を求めよ。

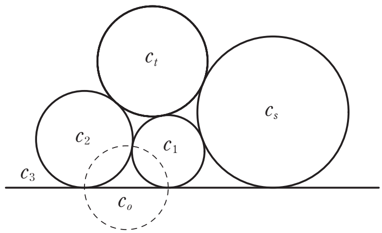

図14　例題2

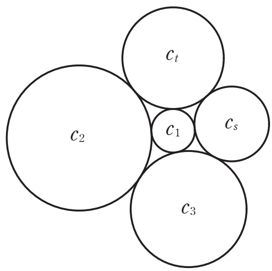

図15　定理14

与えられている半径から，c_1，c_2，c_s を基準3円としたいところであるが，そうすると c_3 が直線であることをどのように表すかで窮してしまう。それならば直線 c_3 を加えて c_1，c_2，c_3 を基準3円とし，半径公式として定理12を用いる方がよさそうである。

例題に取り掛かる前に重要な定理を証明する。この定理は和算では五円傍斜術と呼ばれているものに相当する［1］。図14を一般メビウス変換で移すと図15となる。

定理14　図15のように円 c_1 の周りを4円 c_2，c_3，c_s，c_t が取り囲んでいる。このとき $x=s(c_2,\ c_s)$，$y=s(c_3,\ c_t)$ とするとき

$$(x+1)(y+1)=16$$

が成り立つ。

（証明）　5円の向きをすべて反時計回りとし，基準3円を c_1，c_2，c_3 とする。c_s，c_t の算変座標はそれぞれ$[1,\ x,\ 1]$，$[1,\ 1,\ y]$ となるので距離公式に代入すると

$$(x+1)(y+1)(xy+x+y-15)=0$$

となる。$x,\ y>1$ により定理が成り立つ。 □

それでは例題2に取りかかる。4円 c_1，c_2，c_s，c_t の向きは反時計回りとし，直線 c_3 は左向きとする。c_2，c_s の共通外接線の長さ l は

$$l=2\sqrt{r_1r_2}+2\sqrt{r_1r_s}$$

である。計算はルートを含む複雑な式となることが予想されるので，

$$\sqrt{r_1}=\frac{1}{a},\quad \sqrt{r_2}=\frac{1}{b},\quad \sqrt{r_s}=\frac{1}{c}$$

とおくことにする。c_2，c_s の中心間の距離 d は

$$d^2=l^2+(r_2-r_s)^2$$

なので

$$\begin{aligned} x=s(c_2,\ c_s)&=\frac{d^2-r_2^2-r_s^2}{2r_2r_s}=\frac{l^2-2r_2r_s}{2r_2r_s}\\ &=\frac{4(\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_1r_s})^2}{2r_2r_s}-1=\frac{2(b+c)^2}{a^2}-1 \end{aligned}$$

となる。この値 x を用いて円 c_s の算変座標は $[1,\ x,\ 1]$ となる。つぎに円 c_t の算変座標を $[1,\ 1,\ y]$ とすれば定理 14 により

$$(x+1)(y+1)=16$$

となる。従って

$$y+1=\frac{16}{x+1}=\frac{8a^2}{(b+c)^2}$$

を得る。これを定理 12 に代入すれば

$$p=(r_1+r_2)(y+1)=\frac{8(a^2+b^2)}{b^2(b+c)^2}$$

$$q=2r_1r_2(y+1)=\frac{16}{b^2(b+c)^2}$$

となる。基準3円の直交円 c_o を考えることにより半径公式の2解のうち $|r|$ の大きい方が求めるものである。従って

$$p-2\sqrt{q}=\frac{8(a^2+b^2)}{b^2(b+c)^2}-\frac{8}{b(b+c)}$$
$$=\frac{8(a^2-bc)}{b^2(b+c)^2}$$

となり

$$r_t=\frac{2r_1r_2}{p-2\sqrt{q}}=\frac{(b+c)^2}{4a^2(a^2-bc)}=\frac{(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_s})^2r_1^2}{4(r_2r_s-\sqrt{r_2r_s}r_1)}$$

が結論となる。

10　ま　と　め

この論文では $\sigma>0$ の場合の算変座標の基礎理論の構築を行った。具体的には，任意の基準距離に対して基準3円が常に存在すること，基準距離が等しい2組の基準3円は一般メビウス変換で移り合うこと，算変座標に対して有向円が存在するための必要十分条件などを明らかにした。懸案だった距離公式については一般の場合について証明を与えた。また，半径公式については，公式を扱いやすいように整理し直し，基準3円に直線が含まれる場合の半径公式も導いた。最後に応用例として基準3円の1つが直線である例題を2つ紹介した。この論文の続編では $\sigma<0$ の場合の算変座標の基礎を取りあげる予定である。

参考文献

[1] 佐藤健一・山司勝紀・西田知己，和算の事典，朝倉書店，2009.
[2] 田部井勝稲，精要算法 巻之下（幾何問題），一粒書房，2020.
[3] 平田浩一，算変法不変式がつくる座標系について，松山大学論集，34-1(2022)，57-103.
[4] 平田浩一，算変座標の杉成算への応用，松山大学論集，34-6 (2023)，51-89.
[5] 平田浩一，『累円術無寄』について－算変座標で解く－，数学史研究，Ⅲ-1-3(2023)，117-120.