

松 山 大 学 論 集  
第 34 卷 第 6 号 抜 刷  
2 0 2 3 年 2 月 発 行

## 算変座標の杉成算への応用

平 田 浩 一

# 算変座標の杉成算への応用

平 田 浩 一

## 1 はじめに

杉成算というと吉田光由の『塵劫記』の俵杉算がよく知られている。

【俵杉算】 俵を杉の形に積み上げる。一番上が1俵で、一番下に13俵あるとき、その積まれた俵の総数を求めよ (図1)。

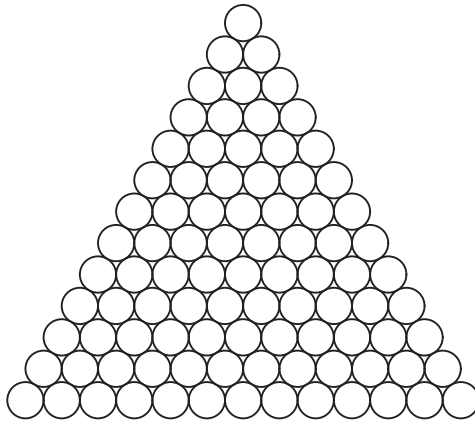


図1 塵劫記の杉成算

この研究で取り上げる杉成算は塵劫記の問題とは違い、つぎのような問題である [1] [2]。

**問題** 互いに接する3円  $c_1, c_2, c_3$  (半径をそれぞれ  $r_1, r_2, r_3$  とする) に挟まれた領域に、円を上から順に1個, 2個, 3個, ... と容れ, 一番下が  $n$  個とする。このとき, 一番上の円  $c$  の半径  $r$  を  $r_1, r_2, r_3, n$  で表せ。(図2は  $n=4$  の場合の図。)

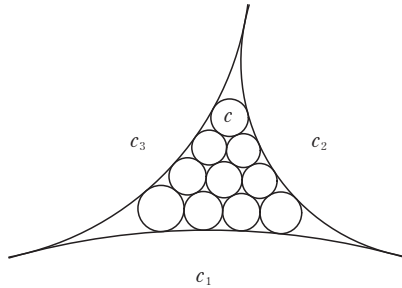


図2 この研究での杉成算 ( $n=4$  のとき)

杉成算は3円に挟まれた領域に俵杉算のように  $\frac{n(n+1)}{2}$  個の円を容れる問題である。厄介なことにすべての円の半径が異なっている。

表1 論文 [1] [2] での  $k_n$  の値

$n$	$k_n$
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
4	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
5	2.113924
6	2.293444006894469

和算家によりその一般解は

$$r = \frac{r_1 r_2 r_3}{2k_n \sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)} + k_n^2 r_1 (r_2 + r_3) + r_2 r_3} \quad (1)$$

の形をしていることが知られている。ただ、 $k_n$  の値や一般解  $k_n$  の予想漸化式などは和算家ごとに計算が食い違っていたようである。現代解としては表 1 にあるように、岩田 [1] が  $n = 5$  までを計算し、北原 [2] が  $n = 6$  までを計算している。

この研究の目的は論文 [3] で導入した算変座標の理論を杉成算に応用することである。円  $c$  の算変座標を  $[s_n, 1, 1]$  とするとき、後述の半径公式により

$$r = \frac{2r_1 r_2 r_3}{2\sqrt{2(s_n + 1)r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)} + (s_n + 1)r_1 (r_2 + r_3) + 2r_2 r_3} \quad (2)$$

となる。2 式(1), (2)を比較することで、 $k_n$  と  $s_n$  の間には

$$s_n = 2k_n^2 - 1 \quad (3)$$

なる関係がある。

この研究においては算変座標を用いて  $s_n$  を具体的に求めることが目標となる。そのため、論文 [3] で述べた反転距離や算変座標についての主要結果とその後の研究成果を整理してから、実際の計算に取り組むことにする。

## 2 反転距離と算変座標

論文 [3] の第 2 節で説明しているように、ユークリッド平面  $E^2$  に無限遠点を追加した集合を

$$E_\infty^2 \rightarrow E^2 \cup \{\infty\}$$

と表すことにする。集合  $E_{\infty}^2$  を導入することにより、円  $c$  による反転  $v_c$  は一対一写像

$$v_c : E_{\infty}^2 \rightarrow E_{\infty}^2$$

となる。また反転より、円は円または直線に移り、直線は円または直線に移る。そのため円と直線を一括りにした「 $E_{\infty}^2$  上の円」という用語を定義する。

**定義 1** つぎの(i)および(ii)を  $E_{\infty}^2$  上の円という。

- (i)  $E^2$  上の円  $c$
- (ii)  $E^2$  上の直線  $l$  に無限遠点を加えた  $l \cup \{\infty\}$

$E^2$  上の直線  $l$  による反転  $v_l$  はその直線による鏡映(線対称移動)であるが、 $v_l(\infty) = \infty$  とみなすことにより一対一写像  $v_l : E_{\infty}^2 \rightarrow E_{\infty}^2$  となる。従って反転は用語「 $E_{\infty}^2$  上の円」により次のようにすっきりと整理される。

**補題 1**  $E_{\infty}^2$  上の円  $c$  による反転  $v_c : E_{\infty}^2 \rightarrow E_{\infty}^2$  で、 $E_{\infty}^2$  上の円は  $E_{\infty}^2$  上の円に移る。

さらに、円には向きがあると考え、向きのある円を**有向円**と呼ぶことにする。有向円  $c$  に対してその向きを逆にした有向円を  $-c$  と表すことにする。有向円が与えられたときその向きに沿って点が円周上を動くとき、その進行方向に対して**右側領域**と**左側領域**が定まる。

2つの有向円  $c_1, c_2$  が与えられたとき、**反転距離**  $s(c_1, c_2) \in \mathbf{R}$  が定義される。正確な定義は [3] で確認していただくことにして、ここでは有向円の符号つき半径を用いた計算方法を補題として紹介するだけにとどめる [3, 補題 5]。ここで、有向円の**符号つき半径**  $r$  とは、有向円が反時計回りならば  $r > 0$ ,

時計回りならば  $r < 0$  と符号を付加した半径のことである。

**補題 2**  $E_{\infty}^2$  上の 2 つの有向円  $c_1, c_2$  の反転距離  $s(c_1, c_2)$  についてつぎの(i)~(iii)が成り立つ。

- (i)  $E^2$  上の 2 つの有向円  $c_1, c_2$  の場合は、2 円の符号つき半径をそれぞれ  $r_1, r_2$  とし、中心間の距離を  $d$  とするとき、つぎの式が成り立つ。

$$s(c_1, c_2) = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$$

- (ii)  $E^2$  上の有向直線  $l_1$  と有向円  $c_2$  の場合は、有向直線  $l_1$  から円  $c_2$  の中心  $O_2$  までの符号つき距離  $h$  を、 $O_2$  が  $l_1$  の右側領域にあれば  $h > 0$ 、左側領域にあれば  $h < 0$  とし、円  $c_2$  の符号つき半径を  $r$  とするとき、つぎの式が成り立つ。

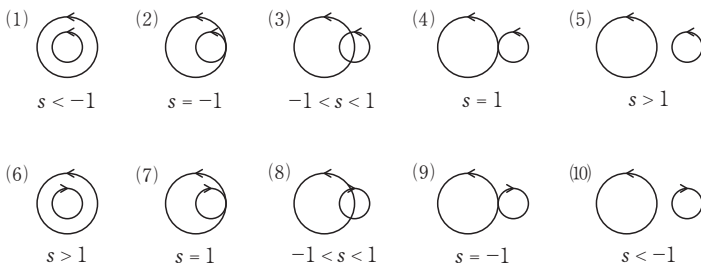
$$s(l_1, c_2) = \frac{h}{r}$$

- (iii)  $E^2$  上の 2 つの有向直線  $l_1$  と  $l_2$  の場合は、そのなす角を  $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$  とするとき、つぎの式が成り立つ。

$$s(l_1, l_2) = -\cos \theta$$

2 円の向き・位置と反転距離  $s = s(c_1, c_2)$  の値の関係は図 3 のようになる。この図から 2 有向円が接するための条件は  $s = \pm 1$  と読み取れる。しかし、接するための条件は応用上とても重要なことなので、正確を期すために定義に戻ってその条件を確認してみる。

反転距離  $s(c_1, c_2)$  の定義は次の式である<sup>1)</sup>

図3 2円の位置と  $s$  の値

$$s(c_1, c_2) = 2 \frac{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)}{(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)} - 1 \quad (4)$$

式中の  $a_1, a_2, b_1, b_2$  については, 2円  $c_1, c_2$  の中心が  $x$  軸上にある場合の例で図4を使って説明する。円  $c_1$  と  $x$  軸の交点の座標が  $a_1, a_2$  で, 円  $c_2$  と  $x$  軸の交点の座標が  $b_1, b_2$  であるが, その選び方は図のように円の向きによって決まる。座標  $a_1, b_1$  の点では円の向きは下向きで, 座標  $a_2, b_2$  の点では円の向きは上向きとなっている。

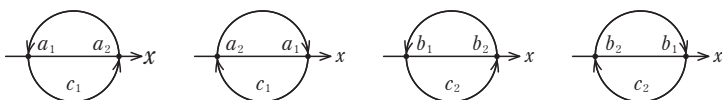


図4 反転距離の定義

このことに着目して2円  $c_1, c_2$  が接する場合の反転距離の値について調べる。最初は  $a_1 = b_1$  となって2円が接する例である(図5)。この場合, 式(4)の分子が0となるので  $s(c_1, c_2) = -1$  となる。

1) この式は [3] の定義4の3式(2), (3), (4)を合成したものである。複比  $\lambda$  は値として無限大をとることもあるので, 複比の計算に慣れていない場合は合成した式を用いるのがよい。

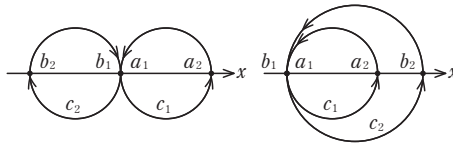


図5  $a_1 = b_1$  の場合

つぎは  $a_2 = b_2$  となって2円が接する例である (図6)。この場合も、式(4)の分子が0となるので  $s(c_1, c_2) = -1$  となる。これら  $a_1 = b_1$  と  $a_2 = b_2$  の2つの場合はともに接点での2円の向きは同じ向きになっていて、ともに  $s(c_1, c_2) = -1$  である。

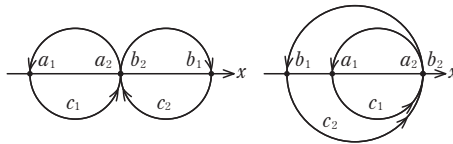


図6  $a_2 = b_2$  の場合

つぎは  $a_1 = b_2$  となって2円が接する例である (図7)。この場合は、式(4)に  $a_1 = b_2$  を代入すると

$$s(c_1, c_2) = 2 \frac{(b_2 - b_1)(a_2 - b_2)}{(b_2 - a_2)(b_1 - b_2)} - 1 = 2 - 1 = 1$$

となる。

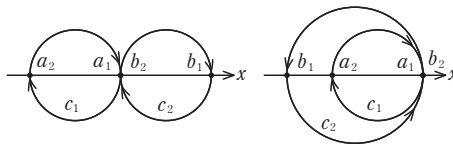


図7  $a_1 = b_2$  の場合



最後は  $a_2 = b_1$  となって2円が接する例である(図8)。この場合も同様に  $s(c_1, c_2) = 1$  となる。これら  $a_1 = b_2$  と  $a_2 = b_1$  の2つの場合はともに接点での2円の向きは逆向きになっていて、ともに  $s(c_1, c_2) = 1$  である。

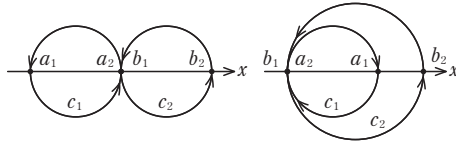


図8  $a_2 = b_1$  の場合

接する2つの有向円  $c_1, c_2$  に対して、接点において2円の向きが同じ向きするとき2円は**有向内接**していると呼び、接点において2円の向きが逆向きするとき2円は**有向外接**していると呼ぶことにする。上で議論したことをまとめると次の補題となる。

**補題3**  $E_{\infty}^2$  上の2つの有向円  $c_1, c_2$  に対して、(i)(ii)が成り立つ。

- (i) 2円が有向内接しているとき  $s(c_1, c_2) = -1$  である。
- (ii) 2円が有向外接しているとき  $s(c_1, c_2) = 1$  である。

注意しなければならないことは、2円が一致するときである。2円が向きも込めて一致するときは  $b_1 = a_1, b_2 = a_2$  となるので

$$s(c_1, c_1) = 2 \frac{(a_1 - a_1)(a_2 - a_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_2)} - 1 = -1$$

となり、2円が一致し逆向きであれば  $b_1 = a_2, b_2 = a_1$  となるので

$$s(c_1, -c_1) = 2 \frac{(a_1 - a_2)(a_2 - a_1)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_1)} - 1 = 1$$

となる。このことから  $s(c_1, c_2) = \pm 1$  には 2 円が一致する場合が含まれることになり、補題 3 の (i), (ii) の逆は成り立たない。

つぎに算変座標を定義する。 $E_{\infty}^2$  上の 3 つの有向定円を  $c_1, c_2, c_3$  とする。また平面上の任意の有向円を  $c$  とする。そこで  $c$  と  $c_1, c_2, c_3$  との反転距離を

$$s_1 = s(c, c_1), \quad s_2 = s(c, c_2), \quad s_3 = s(c, c_3)$$

とし、この 3 つの値を用いた座標  $[s_1, s_2, s_3]$  を有向円  $c$  の**算変座標**と呼ぶ。算変座標は有向円  $c$  を決定する座標である。算変座標に対して、有向定円  $c_1, c_2, c_3$  を**基準 3 円**と呼び、基準 3 円相互の反転距離

$$(e_1, e_2, e_3) = (s(c_2, c_3), s(c_3, c_1), s(c_1, c_2))$$

を**基準距離**と呼ぶ。また、記号  $\sigma$  を

$$\sigma = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 2e_1e_2e_3 - 1$$

と定義する。この  $\sigma$  は基準 3 円の特徴を示す重要な値である。

### 3 基準距離が (1, 1, 1) である基準 3 円の性質

反転を何回か合成した変換を  $E_{\infty}^2$  の**一般メビウス変換**と呼ぶ<sup>2)</sup>。一般メビウス変換  $f$  は  $E_{\infty}^2$  上の有向円全体のなす集合  $O(E_{\infty}^2)$  における変換

$$f : O(E_{\infty}^2) \longrightarrow O(E_{\infty}^2)$$

---

2) 反転を偶数回合成したものは**メビウス変換**と呼ばれる。

とみなすことができる。一般メビウス変換には合同変換や相似変換としての鏡映, 平行移動, 回転, 相似が含まれる。また, 任意の相似変換を  $f$  とするとき  $f(\infty) = \infty$  である。

- (i) 直線  $l$  に関する反転は鏡映である。
- (ii) 平行な 2 直線  $l_1, l_2$  による反転の合成は平行移動である。
- (iii) 交わる 2 直線  $l_1, l_2$  による反転の合成はその交点を中心とする回転である。
- (iv) 同心円  $c_1, c_2$  による反転の合成はその中心による中心相似変換である。

反転距離は, 反転に関して不変であるので, その合成である一般メビウス変換に関しても反転距離は不変である。

**補題 4**  $E_{\infty}^2$  上の 2 つの有向円を  $c_1, c_2$  とし一般メビウス変換を  $f$  とする。このとき

$$s(f(c_1), f(c_2)) = s(c_1, c_2)$$

である。

一般メビウス変換の性質として次の補題が成り立つ。

**補題 5**  $E_{\infty}^2$  上の (異なる) 3 点を  $A, B, C$  とし, もう一組の (異なる) 3 点を  $A', B', C'$  とする。このとき

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C'$$

となる一般メビウス変換  $f$  が存在する。

(証明) 原点を  $O$  とし, 無限遠点を  $\infty$  とする。点  $B$  を反転中心として反転を行った後に平行移動を行う一般メビウス変換  $g_1$  で

$$g_1(A) = O, \quad g_1(B) = \infty$$

となるものが存在する。同様に, 一般メビウス変換  $g_2$  で

$$g_2(A') = O, \quad g_2(B') = \infty$$

となるものが存在する。このとき  $g_1(C)$  と  $g_2(C')$  は原点でもなく無限遠点でもない。そのため  $O$  を中心とする回転と  $O$  を中心とする中心相似変換を合成した一般メビウス変換  $h$  で

$$h(O) = O, \quad h(\infty) = \infty, \quad h(g_1(C)) = g_2(C)$$

となるものが存在する。最後に, 一般メビウス変換  $f$  を合成  $f = g_2^{-1} \circ h \circ g_1$  とすることで,  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$ ,  $f(C) = C'$  となる。□

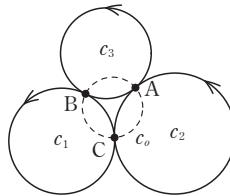


図9 基準3円が互いに接している場合

基準3円  $c_1, c_2, c_3$  の基準距離が  $\delta(e_1, e_2, e_3) = (1, 1, 1)$  の場合が応用上重要で, そのとき基準3円は図9のような位置関係である。基準距離が  $(1, 1, 1)$  なので  $\sigma = 4$  であり, 論文 [3] の定理4により, 基準3円  $c_1, c_2, c_3$  に直交す

るただ1つの円  $c_0$  が存在する。その直交円  $c_0$  は図9にあるように基準3円の3接点 A, B, C を通る円である。

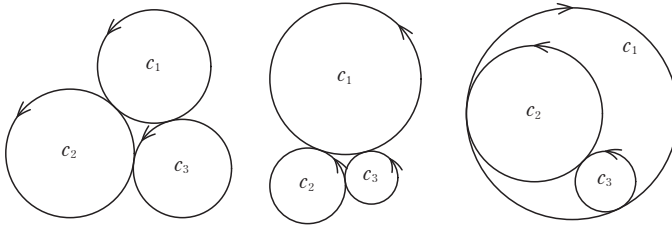


図10 互いに接している基準3円の例

基準距離が  $(1, 1, 1)$  といっても、図10のようにその半径や向きによって3円の位置関係はさまざまである。しかし、次の定理により、これらすべては一般メビウス変換で互いに移り合うことができる。

**定理1**  $E_{\infty}^2$  上の基準3円  $c_1, c_2, c_3$  の基準距離は  $(1, 1, 1)$  で、もう一組の基準3円  $c'_1, c'_2, c'_3$  の基準距離も  $(1, 1, 1)$  とする。このとき

$$f(c_1) = c'_1, \quad f(c_2) = c'_2, \quad f(c_3) = c'_3$$

となる一般メビウス変換  $f$  が存在する。

この定理を証明するために補題を2つ用意する。

**補題6**  $E_{\infty}^2$  上の円  $c$  とその上の2点 A, B が与えられている。このとき、2点 A, B を通り円  $c$  と直交する円  $c'$  はただ一つ存在する。

(証明) 直交関係は反転不変なので、一般メビウス変換で移動することによ

り、円  $c$  は  $E^2$  上の直線で 2 点  $A, B$  はその上の点であると仮定してもよい。このとき、2 点  $A, B$  を通り直線  $c$  と直交する円は線分  $AB$  を直径とする円のみである。□

**補題 7**  $E^2$  上の 2 つの有向円  $c_1, c_2$  が有向外接していて、他の 2 つの有向円  $c'_1, c'_2$  も有向外接しているとする。また一般メビウス変換  $f$  があり  $f(c_1) = \pm c'_1$ ,  $f(c_2) = \pm c'_2$  であると仮定する。このとき符号の組み合わせ 4 通りのうち

$$f(c_1) = c'_1, \quad f(c_2) = c'_2$$

または

$$f(c_1) = -c'_1, \quad f(c_2) = -c'_2$$

のどちらか一方が成り立つ。

(証明) 他の 2 つの可能性を否定すればよい。 $f(c_1) = c'_1, f(c_2) = -c'_2$  のときは

$$s(c'_1, c'_2) = s(f(c_1), -f(c_2)) = s(c_1, -c_2) = -s(c_1, c_2) = -1$$

となり  $c'_1, c'_2$  が有向外接していることに矛盾する。また、 $f(c_1) = -c'_1, f(c_2) = c'_2$  の場合も同様にして矛盾を導くことができる。□

それでは定理 1 の証明に取りかかることにする。

(定理 1 の証明) 点  $A$  を 2 円  $c_2, c_3$  の接点、点  $B$  を 2 円  $c_3, c_1$  の接点、点  $C$  を 2 円  $c_1, c_2$  の接点とする。また円  $c_0$  を 3 点  $A, B, C$  を通る円とすると、 $c_0$

は3円  $c_1, c_2, c_3$  に直交する。同様に,  $c'_1, c'_2, c'_3$  の3接点を  $A', B', C'$  とし, 円  $c'_o$  を3点  $A', B', C'$  を通る円とすると,  $c'_o$  は3円  $c'_1, c'_2, c'_3$  に直交する。補題5により

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C'$$

となる一般メビウス変換  $f$  が存在する。3点を通る円はただ1つしかないので,  $f(c_o) = c'_o$  である。

有向円  $c_1$  は2点  $B, C$  を通り円  $c_o$  に直交しているので, 有向円  $f(c_1)$  は2点  $B', C'$  を通り円  $c'_o$  に直交する。従って補題6により  $f(c_1) = \pm c'_1$  となる。同様にして

$$f(c_1) = \pm c'_1, \quad f(c_2) = \pm c'_2, \quad f(c_3) = \pm c'_3$$

を得る。基準距離が  $(1, 1, 1)$  であることと, 補題7により

$$f(c_1) = c'_1, \quad f(c_2) = c'_2, \quad f(c_3) = c'_3$$

または

$$f(c_1) = -c'_1, \quad f(c_2) = -c'_2, \quad f(c_3) = -c'_3$$

のどちらか一方のみが成り立つ。前者の場合は  $f$  が求める一般メビウス変換である。後者の場合は円  $c'_o$  による反転を  $g$  とするとき, [3, 補題4] により  $g(-c'_i) = c'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) となり,  $g \circ f$  が求める一般メビウス変換である。□

#### 4 算変座標の存在

この節では、基準距離が  $(1, 1, 1)$  の基準 3 円  $c_1, c_2, c_3$  が与えられているとする。このとき任意の 3 実数  $s_1, s_2, s_3$  に対して、算変座標が  $[s_1, s_2, s_3]$  である有向円  $c$  が存在するかどうかについて考察する。常に  $c$  が存在すれば好都合なのであるが実際はそうならない。

**補題 8** 基準距離が  $(1, 1, 1)$  の基準 3 円  $c_1, c_2, c_3$  に対する有向円  $c$  の算変座標を  $[s_1, s_2, s_3]$  とするとき

$$s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 + 1 \geq 0$$

が成り立つ。

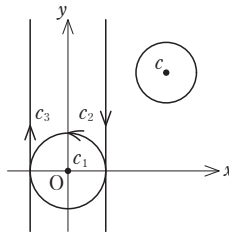


図 11 補題 8 の証明

(証明) 定理 1 により、基準 3 円  $c_1, c_2, c_3$  は図 11 のように、 $c_1$  が原点を中心として符号つき半径が 1 の円、 $c_2$  が点  $(1, 0)$  を通り  $y$  軸と平行で下向きの直線、 $c_3$  が点  $(-1, 0)$  を通り  $y$  軸と平行で上向きの直線であると仮定しても一般性を失わない。有向円  $c$  については  $E^2$  上の円か直線かで場合分けする。

( $c$  が  $E^2$  上の有向円の場合) 円  $c$  の中心座標を  $(x, y)$  とし、符号つき半径を  $r$  とする。このとき  $c$  の算変座標  $[s_1, s_2, s_3]$  は



$$s_1 = \frac{x^2 + y^2 - r^2 - 1}{2r}, \quad s_2 = \frac{1-x}{r}, \quad s_3 = \frac{1+x}{r}$$

となるので,  $rs_2 = 1-x$ ,  $rs_3 = 1+x$  であり,  $r(s_2 + s_3) = 2$  という関係が成り立つため

$$s_2 + s_3 \neq 0 \tag{5}$$

である。さらに

$$r = \frac{2}{s_2 + s_3}, \quad x = \frac{s_3 - s_2}{s_2 + s_3} \tag{6}$$

と変形することができる。また  $s_1$  については

$$2rs_1 = x^2 + y^2 - r^2 - 1 \geq x^2 - r^2 - 1$$

により

$$2rs_1 \geq x^2 - r^2 - 1 \tag{7}$$

が成り立ち, これに(6)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{4s_1}{s_2 + s_3} &\geq \left( \frac{s_3 - s_2}{s_2 + s_3} \right)^2 - \left( \frac{2}{s_2 + s_3} \right)^2 - 1 \\ &= \frac{(s_3 - s_2)^2 - 4 - (s_2 + s_3)^2}{(s_2 + s_3)^2} \\ &= \frac{-4s_2s_3 - 4}{(s_2 + s_3)^2} \end{aligned}$$

より

$$\frac{4s_1}{s_2 + s_3} \geq \frac{-4s_2s_3 - 4}{(s_2 + s_3)^2}$$

となる。この両辺に  $(s_2 + s_3)^2 > 0$  を掛けて整理することで

$$s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1 + 1 \geq 0 \quad (8)$$

となる。

( $c$  が  $E^2$  上の有向直線の場合) 有向直線  $c$  と原点との符号つき距離を  $h$  とし、有向直線  $c$  と有向直線  $c_2$  とのなす角を  $\theta$  とするとき

$$s_1 = h, \quad s_2 = -\cos \theta, \quad s_3 = \cos \theta$$

となる。従って

$$\begin{aligned} s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1 + 1 &= -h \cos \theta + h \cos \theta - \cos^2 \theta + 1 \\ &= 1 - \cos^2 \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

となる。 □

**補題 9** 基準距離が  $(1, 1, 1)$  であるような基準 3 円を  $c_1, c_2, c_3$  とする。関係式

$$s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1 + 1 \geq 0$$

をみたす任意の実数  $s_1, s_2, s_3$  が与えられたとき、算変座標が  $[s_1, s_2, s_3]$  となる有向円  $c$  が存在する。

(証明) 補題8のときと同様に, 3円  $c_1, c_2, c_3$  は図11のようであると仮定する。具体的に有向円  $c$  を定め, その算変座標が  $[s_1, s_2, s_3]$  となることを確認すればよい。

( $s_2 + s_3 \neq 0$  のとき) 有向円  $c$  の中心  $(x, y)$  と符号つき半径  $r$  を

$$x = \frac{s_3 - s_2}{s_2 + s_3}, \quad y = \pm \frac{2\sqrt{s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 + 1}}{s_2 + s_3}, \quad r = \frac{2}{s_2 + s_3}$$

と定める。このとき,

$$\begin{aligned} s(c_1, c) &= \frac{x^2 + y^2 - r^2 - 1}{2r} \\ &= \left\{ \frac{(s_3 - s_2)^2 + 4(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 + 1) - 4 - (s_2 + s_3)^2}{(s_2 + s_3)^2} \right\} \left( \frac{s_2 + s_3}{4} \right) \\ &= \frac{s_1 s_2 + s_1 s_3}{s_2 + s_3} = s_1 \end{aligned}$$

である。有向直線  $c_2, c_3$  から円  $c$  の中心までの符号つき距離をそれぞれ  $h_2, h_3$  とするとき,

$$\begin{aligned} s(c_2, c) &= \frac{h_2}{r} = \frac{1-x}{r} = \left( 1 - \frac{s_3 - s_2}{s_2 + s_3} \right) \left( \frac{s_2 + s_3}{2} \right) = s_2 \\ s(c_3, c) &= \frac{h_3}{r} = \frac{1+x}{r} = \left( 1 + \frac{s_3 - s_2}{s_2 + s_3} \right) \left( \frac{s_2 + s_3}{2} \right) = s_3 \end{aligned}$$

となる。従って算変座標  $[s_1, s_2, s_3]$  をもつ有向円  $c$  が存在する。

( $s_2 + s_3 = 0$  のとき) 条件

$$s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 + 1 = s_1 (s_2 + s_3) + s_2 s_3 + 1 = s_2 s_3 + 1 \geq 0$$

により

$$s_2 s_3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow s_2^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq s_2 \leq 1$$

なので、 $\theta$  を  $\cos \theta = -s_2$  となるようにとる。有向直線  $c$  を有向直線  $c_2$  とのなす角度を  $\theta$  とし、原点との符号つき距離を  $h = s_1$  となるようにとる。このとき、

$$s(c_1, c) = h = s_1, \quad s(c_2, c) = -\cos \theta = s_2$$

$$s(c_3, c) = -\cos(\pi - \theta) = \cos \theta = -s_2 = s_3$$

となる。従ってこの場合も算変座標  $[s_1, s_2, s_3]$  をもつ有向円  $c$  が存在する。

□

補題 8 と補題 9 を一つにまとめると次の定理になる。

**定理 2** 基準距離が  $(1, 1, 1)$  であるような基準 3 円を  $c_1, c_2, c_3$  とする。任意の実数  $s_1, s_2, s_3$  が与えられたとき、算変座標が  $[s_1, s_2, s_3]$  である有向円  $c$  が存在するための必要十分条件は

$$s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 + 1 \geq 0$$

である。

つぎに定理 2 の条件式の等号成立条件に関しては次の定理が成り立つ。

**定理 3** 基準距離が  $(1, 1, 1)$  であるような基準 3 円を  $c_1, c_2, c_3$  とし、基準 3 円と直交する円を  $c_0$  とする。有向円  $c$  の算変座標  $[s_1, s_2, s_3]$  が式

$$s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1 + 1 = 0$$

をみたすための必要十分条件は円  $c$  が  $c_0$  と直交することである。

(証明) 補題8のときと同様に, 3円  $c_1, c_2, c_3$  は図11のようであると仮定する。このとき, 3円  $c_1, c_2, c_3$  に直交する円  $c_0$  は  $x$  軸である。

( $c$  が  $E^2$  上の有向円の場合) 補題8の証明の中で式(7)の等号成立条件を調べればよい。実際, 等号が成立するのは  $y=0$  のときである。また  $y=0$  のときは有向円  $c$  の中心が  $x$  軸上にあることにより  $c$  と  $c_0$  は直交している。逆に  $c$  と  $c_0$  が直交するときは,  $y=0$  であり, 式(7)の等号が成立する。

( $c$  が  $E^2$  上の有向直線の場合) この場合は式(9)の等号成立条件を調べればよい。等号が成立するのは,  $\cos\theta = \pm 1$  のときであり, このとき  $c$  と  $c_0$  は直交している。また逆も明らかである。  $\square$

## 5 半径公式と距離公式

以下では基準3円は図9のように基準距離が  $(1, 1, 1)$  である場合に限定することにする。論文 [3] の主要結果の一つである半径公式はつぎの定理である。

**定理4 (半径公式)**  $E^2$  上の基準3円  $c_1, c_2, c_3$  が互いに有向外接し, 基準距離は  $(1, 1, 1)$  とする。 $E^2$  上の有向円  $c$  の算変座標  $[s_1, s_2, s_3]$  が与えられたとき, 円  $c$  の符号つき半径  $r$  は2次方程式

$$(p^2 - 4q)r^2 - 4pr_1r_2r_3r + 4r_1^2r_2^2r_3^2 = 0 \quad (10)$$

で求まり, その解は

$$r = \frac{2r_1r_2r_3}{p \pm 2\sqrt{q}} \quad (11)$$

となる。ここで  $p, q$  は、基準 3 円の符号つき半径をそれぞれ  $r_1, r_2, r_3$  とするとき

$$\begin{aligned} p &= r_1(r_2 + r_3)s_1 + r_2(r_3 + r_1)s_2 + r_3(r_1 + r_2)s_3 \\ q &= r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)(1 + s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1) \end{aligned}$$

である。

この定理の式(11)のルートの中の  $q$  が 0 以上となるかどうか気がなるところである。定理 2 により  $s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1 + 1 \geq 0$  なので、確認すべきことは  $r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3) \geq 0$  である。一見するところ、各  $r_i$  は符号つき半径なので左辺の値は負になる可能性もあるように思われるが、つぎの補題により負となることはない。

**補題 10**  $E^2$  上の基準 3 円  $c_1, c_2, c_3$  が互いに有向外接し、基準距離は  $(1, 1, 1)$  とする。基準 3 円の符号つき半径をそれぞれ  $r_1, r_2, r_3$  とするとき

$$r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3) \geq 0$$

である。

(証明) 基準 3 円  $c_1, c_2, c_3$  の中心をそれぞれ  $O_1, O_2, O_3$  とする。三角形  $O_1O_2O_3$  の 3 辺の長さは  $a = O_1O_2 = |r_1 + r_2|$ ,  $b = O_2O_3 = |r_2 + r_3|$ ,  $c = O_3O_1 = |r_3 + r_1|$  となる。そこで三角形  $O_1O_2O_3$  の面積  $S$  をヘロンの公式を使って計算すると、 $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$  とするとき

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4} \\
 S^2 &= \frac{1}{16} (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4) \\
 &= r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)
 \end{aligned}$$

となる。3点  $O_1, O_2, O_3$  は一直線上になることもあり  $S=0$  の可能性もあるので、 $r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3) \geq 0$  である。□

このことから算変座標  $[s_1, s_2, s_3]$  が与えられたときその座標に対応する有向円  $c$  が存在する場合は、半径公式により2つの符号つき半径が求まる。符号つき半径が求まれば、その中心も確定する。このようにして求まる2有向円を  $c, c'$  とすれば図9の  $c_0$  による反転  $v$  により  $v(c) = -c'$  となる [3, 補題17]。

算変座標に関する主要結果の2つ目はつぎの距離公式である [3, 定理8]。

**定理5 (距離公式)**  $E_2^3$  上の基準3円  $c_1, c_2, c_3$  が互いに有向外接していて、基準距離は  $(1, 1, 1)$  とする。 $E_2^3$  上の2有向円  $c_s, c_t$  の算変座標をそれぞれ  $c_s [s_1, s_2, s_3], c_t [t_1, t_2, t_3]$  とし反転距離を  $x = s(c_s, c_t)$  とする (図12)。このとき  $x$  はつぎの2次方程式

$$4x^2 - 4\rho x + \rho^2 - 4\tau_s \tau_t = 0 \tag{12}$$

をみたし、その解は

$$x = \frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\tau_s \tau_t} \tag{13}$$

である。ここで  $\rho, \tau_s, \tau_t$  は

$$\rho = s_1 t_2 + s_2 t_1 + s_2 t_3 + s_3 t_2 + s_3 t_1 + s_1 t_3$$

$$\tau_s = 1 + s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1$$

$$\tau_t = 1 + t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1$$

である。

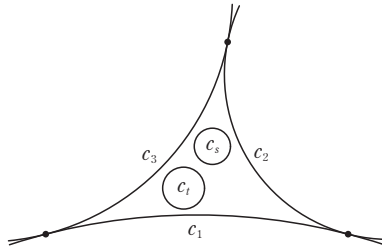


図 12 定理 5

式(13)のルートの中が負にならないことは定理 2 により明らかである。この距離公式は 2 有向円  $c_s, c_t$  が有向外接するための条件式として利用されることが多い。そこで距離公式に  $x = 1$  を代入することによりつぎの定理が得られる。

**定理 6 (外接公式)**  $E_{\infty}^2$  上の基準 3 円  $c_1, c_2, c_3$  が互いに有向外接していて、基準距離は  $(1, 1, 1)$  とする。2 つの有向円  $c_s, c_t$  の算変座標をそれぞれ  $c_s[s_1, s_2, s_3], c_t[t_1, t_2, t_3]$  とする。このとき  $c_s, c_t$  が有向外接するための条件は

$$(\rho - 2)^2 - 4\tau_s \tau_t = 0 \quad (14)$$

である。ここで  $\rho, \tau_s, \tau_t$  は定理 5 に同じ。

この定理 6 の式(14)は今後頻繁に用いるので、記号を導入して



$$J(c_s, c_t) = (\rho - 2)^2 - 4\tau_s \tau_t \quad (15)$$

と表すことにする。

## 6 杉 成 算

これで準備が整ったので、杉成算の問題に取り掛かることにする。

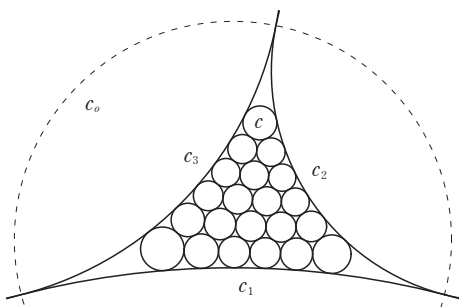


図 13 杉成算 ( $n = 6$ )

互いに有向外接する基準 3 円  $c_1, c_2, c_3$  で囲まれた領域に、図 13 のように、上から順に 1 個、2 個、…と円が容れられていて、一番下の円の個数を  $n$  とする。円の向きはすべて反時計回りとする。一番上の円  $c$  の算変座標  $[s_n, 1, 1]$  ( $s_n \geq 1$ ) が計算できたとすれば、円  $c$  の半径  $r$  は定理 4 (半径公式) で求めることができる。半径公式からは 2 つの符号つき半径が求まるが、 $c$  以外の解は基準 3 円に直交する円  $c_0$  による  $c$  の反転像であり、その半径は  $c$  の半径よりかなり大きいものとなる。従って半径公式の 2 解のうち絶対値の小さい方が求める半径  $r$  となる。公式に  $[s_n, 1, 1]$  を代入して計算してみると、

$$\begin{aligned}
 p &= r_1(r_2 + r_3)s_1 + r_2(r_3 + r_1)s_2 + r_3(r_1 + r_2)s_3 \\
 &= r_1(r_2 + r_3)s_n + r_2(r_3 + r_1) + r_3(r_1 + r_2) \\
 &= (s_n + 1)r_1(r_2 + r_3) + 2r_2r_3 \\
 q &= r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)(1 + s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1) \\
 &= 2(s_n + 1)r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3) \geq 0 \\
 r &= \frac{2r_1r_2r_3}{p + 2\sqrt{q}} \\
 &= \frac{2r_1r_2r_3}{2\sqrt{2(s_n + 1)r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)} + (s_n + 1)r_1(r_2 + r_3) + 2r_2r_3}
 \end{aligned}$$

となり、これが第1節の式(2)である。

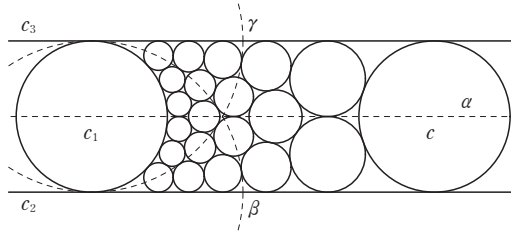


図 14 杉成算の変換図 ( $n = 6$ )

論文 [1], [2] では、図 13 を一般メビウス変換で図 14 に変換し、2円  $c_1$  と  $c$  との距離を計算することで杉成算を解いている。その計算過程では、2円  $c_1$  と  $c$  の間にある多数の円の半径や位置関係を丹念に調べあげる必要がある。そのとき、図に破線で示した直線  $\alpha$  に関する反転対称性が使われる。 $n$  が小さいときにはそれだけでよいのであるが、 $n$  が大きくなると破線で示した円  $\beta$  や円  $\gamma$  に関する反転対称性も考慮する必要性があり、そこがこの問題の厄介な部分である。これまでの研究が  $n = 6$  までで止まっていたのは、立式の難しさが原因していると思われる。

算変座標を用いた計算では、2円  $c_s, c_t$  が互いに外接しているという関係を

定理6 (外接公式) を用いて  $J(c_s, c_t) = 0$  のように簡単に式で表すことができる。それがこの方法の利点である。さらに、以下に述べる対称性もまた利点となっている。

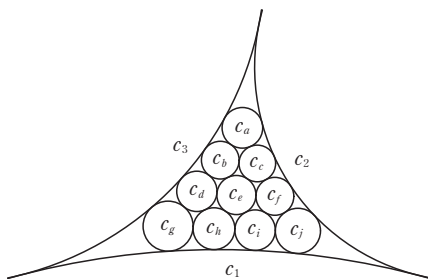


図15 杉成算の対称性 ( $n = 4$ )

図15は  $n = 4$  の場合で、内部の10個の円を  $c_a, c_b, \dots, c_j$  とした。円  $c_a$  の算変座標は  $s(c_a, c_2) = s(c_a, c_3) = 1$  であることにより  $c_a[a, 1, 1]$  の形をしている。このように基準3円に直接有向外接している円の座標には1という値が入る。そのため10個の円の座標値30個のうち12個は計算をするまでもなく1となる。

円  $c_a$  の算変座標を  $c_a[a, 1, 1]$  とすると、定理1により3円  $c_1, c_2, c_3$  をそれぞれ3円  $c_2, c_3, c_1$  に移す一般メビウス変換  $f$  が存在する。この  $f$  により  $f(c_a) = c_g$  となる。そのため

$$s(c_g, c_2) = s(f(c_a), f(c_1)) = s(c_a, c_1) = a$$

により、 $c_g$  の算変座標は  $c_g[1, a, 1]$  となる。同様に  $c_j[1, 1, a]$  である。

つぎに円  $c_b$  の算変座標を  $c_b[b, c, 1]$  とすると、3円  $c_1, c_2, c_3$  をそれぞれ3円  $c_1, c_3, c_2$  に移す一般メビウス変換  $g$  により  $c_c[b, 1, c]$  となる。同様にして  $f, g$  の変換により、 $c_d[c, b, 1], c_f[c, 1, b], c_h[1, b, c], c_i[1, c, b]$  となる。

最後の円  $c_e$  は変換  $f$  により  $f(c_e) = c_e$  なので

$$s(c_e, c_1) = s(c_e, c_2) = s(c_e, c_3)$$

となり, その算変座標は  $c_e[d, d, d]$  の形をしている。

算変座標で  $n = 4$  のときの杉成算を解こうとすると, 4個の変数  $a, b, c, d$  だけで10個の円の算変座標を表すことができることがわかった。この4個の変数の値を決定するには方程式が4本あればよいことになる。

定理6 (外接公式) を用いて式を立てるときにも対称性が関わっている。外接する2円  $c_a, c_b$  を変換  $f$  で移すと外接する2円  $c_g, c_h$  となる。このことにより外接公式は  $J(c_a, c_b) = J(c_g, c_h) = 0$  となり同じ式となる。立式にあたっては対称関係がない2円の組み合わせを選んで立式する必要がある。

表2 杉成算の円の数と変数の数

$n$	円の数	変数の数	$n$	円の数	変数の数
1	1	0	6	21	9
2	3	1	7	28	12
3	6	2	8	36	16
4	10	4	9	45	20
5	15	6	10	55	25

表2は杉成算の各  $n$  について, 基準3円に挟まれた領域内の円の数, 問題を算変座標で解くのに必要な変数の数を表にしたものである。円の数に比べて変数の数の増加はゆるやかである。

杉成算の各  $n$  に対して, 必要な変数の数と外接公式を使って立式できる異なる方程式の数は一致する。つまり算変座標の理論を用いればすべての  $n$  に対して杉成算を解く連立方程式を立式することができる。しかし, その連立方程式を実際に解いて答えを導くことができるかどうかは別問題である。

### 6.1 $n = 1$ と $n = 2$ の場合

この2つの場合は [3] の例題1と例題2であり,

$$s_1 = 1, \quad k_1 = 1, \quad s_2 = 3, \quad k_2 = \sqrt{2}$$

である。

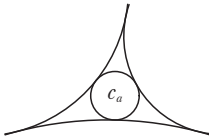


図 16  $n = 1$  の場合

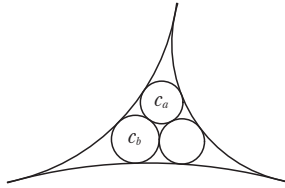


図 17  $n = 2$  の場合

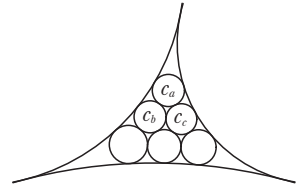


図 18  $n = 3$  の場合

### 6.2 $n = 3$ の場合

基準3円内の3円を図18のように  $c_a[a, 1, 1]$ ,  $c_b[b, b, 1]$ ,  $c_c[b, 1, b]$  とする。外接公式で  $J(c_b, c_c) = 0$  を計算すると

$$(5b+1)(b+1)^2(b-3) = 0$$

となり,  $b > 1$  より  $b = 3$  が得られる。外接公式で  $J(c_a, c_b) = 0$  を計算すると

$$a^2 - 4a - 4 = 0$$

となり,  $a > 1$  より  $a = 2\sqrt{2} + 2$  となる。従って

$$s_3 = 2\sqrt{2} + 2, \quad k_3 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

である。

### 6.3 $n = 4$ の場合

基準3円内の10円中の5円を図19のように  $c_a[a, 1, 1]$ ,  $c_b[b, c, 1]$ ,  $c_c[b, 1, c]$ ,  $c_d[c, b, 1]$ ,  $c_e[d, d, d]$  とする。外接公式で  $J(c_b, c_c) = 0$  を計算すると

$$(c+1)^2(4b+c+1)(c-3)=0$$

となり,  $b, c > 1$  より  $c = 3$  となる。外接公式で  $J(c_b, c_d) = 0$  を計算すると

$$(b+7)(b+3)(b-1)(b-5)=0$$

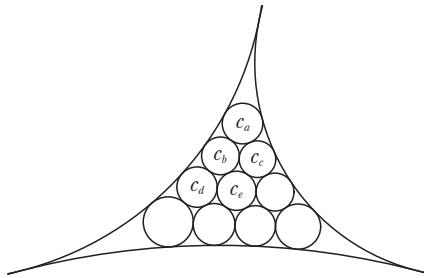


図19  $n = 4$  の場合

となり,  $b > 1$  より  $b = 5$  となる。外接公式で  $J(c_a, c_b) = 0$  を計算すると

$$16(a^2 - 6a - 3) = 0$$

となり,  $a > 1$  より  $a = 2\sqrt{3} + 3$  となる。従って

$$s_4 = 2\sqrt{3} + 3, \quad k_4 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

である。計算には円  $c_e$  を用いる必要はなかった。

#### 6.4 $n = 5$ の場合

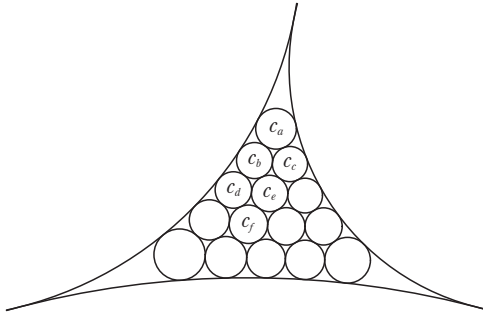


図 20  $n = 5$  の場合

基準 3 円内の 6 円を図 20 のように  $c_a[a, 1, 1]$ ,  $c_b[b, c, 1]$ ,  $c_c[b, 1, c]$ ,  $c_d[d, d, 1]$ ,  $c_e[e, f, f]$ ,  $c_f[f, e, f]$  とする。変数は 6 個である。外接公式で  $J(c_b, c_c) = 0$  を計算すると

$$(c+1)^2(4b+c+1)(c-3) = 0$$

となり,  $b, c > 1$  より  $c = 3$  となる。外接公式で  $J(c_e, c_f) = 0$  を計算すると

$$(e+f)(e+5f)(e-f+2)(e-f-2) = 0$$

となり,  $e > f > 1$  より  $e = f + 2$  となる。

つぎに外接公式で  $J(c_a, c_b) = 0$ ,  $J(c_b, c_d) = 0$ ,  $J(c_b, c_e) = 0$ ,  $J(c_d, c_e) = 0$  を計算すると

$$4a^2 - 4(b+1)a + b^2 - 6b - 7 = 0 \quad (16)$$

$$(b-3)^2 d^2 + 2(b+1)(b-11)d + (b+1)(b-15) = 0 \quad (17)$$

$$(b-2)^2 f^2 - 2(5b-4)f - 4b + 5 = 0 \quad (18)$$

$$(d^2 - 2d - 2)f^2 - 2(3d+2)f - 2d - 1 = 0 \quad (19)$$

となる。

式がかなり複雑になってきているので手計算ではそろそろ限界である。この先は数式処理ソフトウェアの出番である。この4式の連立方程式を数値的に解いて  $a, b, d, f > 1$  となる実解はただ1組で

$$a = 7.937350999, \quad b = 6.916540937, \quad d = 5.042281188, \quad f = 2.858428262$$

である。従って

$$s_5 = 7.937350999, \quad k_5 = 2.113924194$$

となる。

$s_5$  を求める代数方程式を求めようとするならば、3式(17), (18), (19)から  $d, f$  を消去して因数分解することのでつぎの2つの因数を得る。

$$b^6 - 22b^5 + 95b^4 + 140b^3 - 273b^2 - 2198b + 3281 = 0 \quad (20)$$

$$b^8 - 24b^7 - 116b^6 + 440b^5 + 7990b^4 + 38424b^3 + 97772b^2 + 81864b + 35793 = 0 \quad (21)$$



このうちで  $b = 6.9165\dots$  を含むのは(20)である。つぎに(16)と(20)から  $b$  を消去することで、2つの因数を得る。

$$a^6 - 18a^5 + 63a^4 - 100a^3 + 263a^2 + 438a + 9 = 0 \quad (22)$$

$$a^6 - 10a^5 + 7a^4 + 76a^3 + 23a^2 - 258a - 207 = 0 \quad (23)$$

このうちで  $a = 7.9373\dots$  を含むのは(23)である。従って求める  $s_5$  は6次方程式(23)の解である。さらに  $\sqrt{2}$  を添加すると(23)は3次式2つに因数分解できて解を含む方は

$$a^3 - (4\sqrt{2} + 5)a^2 + (8\sqrt{2} + 7)a + 12\sqrt{2} + 9 = 0 \quad (24)$$

の方である。従って  $s_5$  は3次方程式(24)の解である。

## 6.5 $n = 6$ の場合

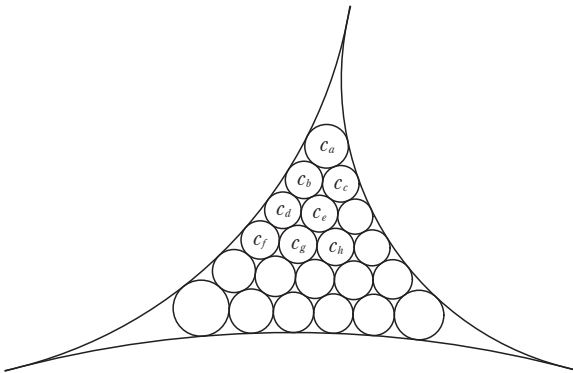


図 21  $n = 6$  の場合

基準3円に挟まれた領域にある8円を図21のように $c_a[a, 1, 1]$ ,  
 $c_b[b, c, 1]$ ,  $c_c[b, 1, c]$ ,  $c_d[d, e, 1]$ ,  $c_e[f, g, g]$ ,  $c_f[e, d, 1]$ ,  $c_g[h, h, i]$ ,  
 $c_h[h, i, h]$ とする。変数は9個である。外接公式で $J(c_b, c_c)=0$ を計算すると

$$(c+1)^2(4b+c+1)(c-3)=0$$

となり,  $b, c > 1$  より  $c = 3$  となる。外接公式で $J(c_d, c_f)=0$ を計算すると

$$(d+e)(d+e+4)(d-e+2)(d-e-2)=0$$

となり,  $d > e > 1$  より  $d = e + 2$  となる。外接公式で $J(c_g, c_h)=0$ を計算すると

$$(h+i)(5h+i)(h-i+2)(h-i-2)=0$$

となり,  $h > i > 1$  より  $h = i + 2$  となる。

つぎに外接公式で $J(c_a, c_b)=0$ ,  $J(c_b, c_d)=0$ ,  $J(c_b, c_e)=0$ ,  $J(c_d, c_e)=0$ ,  
 $J(c_d, c_g)=0$ ,  $J(c_e, c_g)=0$ を計算すると

$$4a^2 - 4(b+1)a + (b+1)(b-7) = 0 \quad (25)$$

$$(b-3)^2 e^2 + 2(b^2 - 18b + 13)e + b^2 - 30b + 33 = 0 \quad (26)$$

$$b^2 g^2 - 2(2bf + b + 2)g - 4b + 4f^2 - 4f - 3 = 0 \quad (27)$$

$$(5e^2 + 14e + 13)g^2 - 2(e^2 f + 8ef + 6e + 7f + 10)g + e^2 f^2 - 4e^2 + 2ef^2 - 4ef - 16e + f^2 - 4f - 8 = 0 \quad (28)$$

$$e^2 i - e^2 - 8e - 6 = 0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} (f^2 - 2fg + g^2 - 3)i^2 + 2(f^2 - 3fg - f + 2g^2 - 2g - 4)i \\ + f^2 - 4fg - 2f + 4g^2 - 6g - 4 = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

となる。

この6式の連立方程式を数値的に解いて  $a, b, e, f, g, i > 1$  となる実解はただ1組で

$$\begin{aligned} a = 9.277628070, \quad b = 8.731760161, \quad e = 5.054828274, \\ f = 6.823251297, \quad g = 2.850432653, \quad i = 2.817467072 \end{aligned}$$

である。従って数値解<sup>3)</sup>は

$$s_6 = 9.277628070, \quad k_6 = 2.266895241$$

となる。

$s_6$  がみたす代数方程式を求めようとする、これら6式から変数  $b, e, f, g, i$  を消去し、解  $a = 9.2776\dots$  を含む因数を取り出すと、

$$a^6 - 40a^5 + 578a^4 - 3676a^3 + 9321a^2 - 2308a - 15908 = 0 \quad (31)$$

となる。これが  $s_6$  がみたす6次方程式である。さらに  $\sqrt{2}$  を添加すると3次式2つに因数分解できて  $s_6$  を含む方は

---

3) この  $k_6$  は北原氏の計算結果とは異なる結果となった。木下宙氏の指摘によると、北原[2]の  $n=6$  の場合の計算は方程式を求めるところまでは正確に計算しているが、数値解を出す最後の計算でミスがあったようである。

$$a^3 + (6\sqrt{2} - 20)a^2 + (125 - 76\sqrt{2})a + 198\sqrt{2} - 250 = 0 \quad (32)$$

である。

## 6.6 $n = 7$ の場合

基準3円に挟まれた領域にある10円を図22のように  $c_a[a, 1, 1]$ ,  $c_b[b, c, 1]$ ,  $c_c[b, 1, c]$ ,  $c_d[d, e, 1]$ ,  $c_e[f, g, g]$ ,  $c_f[h, h, 1]$ ,  $c_g[i, j, k]$ ,  $c_h[i, k, j]$ ,  $c_i[j, i, k]$ ,  $c_j[l, l, l]$  とする。変数は12個である。

最初に外接公式で  $J(c_b, c_c) = 0$ ,  $J(c_g, c_h) = 0$ ,  $J(c_g, c_i) = 0$  を計算することで

$$c = 3, \quad j = k + 2, \quad i = k + 4$$

を得る。つぎに8個の外接公式  $J(c_a, c_b) = 0$ ,  $J(c_b, c_d) = 0$ ,  $J(c_b, c_e) = 0$ ,  $J(c_d, c_e) = 0$ ,  $J(c_d, c_f) = 0$ ,  $J(c_d, c_g) = 0$ ,  $J(c_e, c_g) = 0$ ,  $J(c_f, c_i) = 0$  で連立方程式を作る<sup>4)</sup>

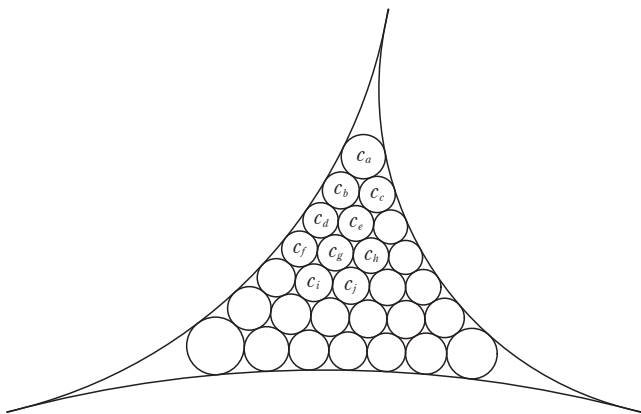
計算方法は同様なので結果のみを示すことにする。 $s_7$  がみたす整数係数の多項式は12次方程式

$$\begin{aligned} & 529a^{12} - 29236a^{11} + 576842a^{10} - 5286660a^9 + 22791975a^8 \\ & - 38792104a^7 + 95764428a^6 - 1181390760a^5 + 5726555919a^4 \\ & - 12332286884a^3 + 9543381514a^2 + 10532656172a - 15400629863 = 0 \end{aligned}$$

である。さらに  $\sqrt{2}$  と  $\sqrt{3}$  を添加すると3次式4つに因数分解できて  $s_7$  を含む方は

---

4)  $J(c_g, c_i) = 0$  は杉成算を解くには不必要である。

図 22  $n = 7$  の場合

$$\begin{aligned}
 &529a^3 - (7309 + 4392\sqrt{2} + 2802\sqrt{3} + 1508\sqrt{6})a^2 \\
 &+ (64355 + 47072\sqrt{2} + 37408\sqrt{3} + 23416\sqrt{6})a \\
 &- 218819 - 136256\sqrt{2} - 116350\sqrt{3} - 91212\sqrt{6} = 0
 \end{aligned}$$

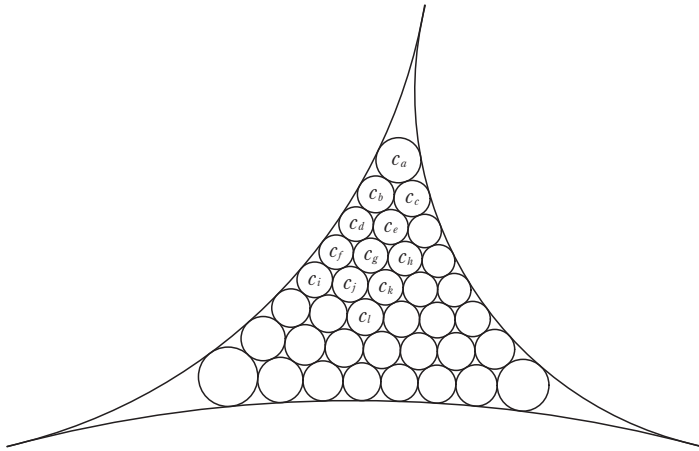
である。数値的には

$$s_7 = 10.50821304, \quad k_7 = 2.398771878$$

である。

### 6.7 $n = 8$ の場合

基準3円に挟まれた領域にある12個の円を図23のように  $c_a[a, 1, 1]$ ,  $c_b[b, c, 1]$ ,  $c_c[b, 1, c]$ ,  $c_d[d, e, 1]$ ,  $c_e[f, g, g]$ ,  $c_f[h, i, 1]$ ,  $c_g[j, k, l]$ ,  $c_h[j, l, k]$ ,  $c_i[i, h, 1]$ ,  $c_j[m, m, n]$ ,  $c_k[o, p, p]$ ,  $c_l[p, o, p]$  とする。変数は16個である。

図 23  $n = 8$  の場合

最初に外接公式で  $J(c_b, c_c) = 0$ ,  $J(c_f, c_i) = 0$ ,  $J(c_g, c_h) = 0$ ,  $J(c_k, c_l) = 0$  を計算することで

$$c = 3, \quad h = i + 2, \quad k = l + 2, \quad o = p + 2$$

を得る。これで変数は 12 個となった。つぎに 12 個の外接公式

$$\begin{aligned} J(c_a, c_b) = 0, \quad J(c_b, c_d) = 0, \quad J(c_b, c_e) = 0, \quad J(c_d, c_e) = 0, \\ J(c_d, c_f) = 0, \quad J(c_d, c_g) = 0, \quad J(c_e, c_g) = 0, \quad J(c_f, c_g) = 0, \\ J(c_f, c_j) = 0, \quad J(c_g, c_j) = 0, \quad J(c_g, c_k) = 0, \quad J(c_j, c_k) = 0 \end{aligned}$$

で連立方程式を作る。この後は数式処理ソフトを用いて順に変数を消去するのであるが、4 変数ほどを消去するまでは計算できるが、その後は数式が大きくなり過ぎて計算がいつ終わるかわからない状態となり、計算を完了することはできなかった。

## 7 ま と め

以上の結果をまとめると表3となる。杉成算の問題を  $1 \leq n \leq 7$  の範囲で算変座標を用いて解くことができた。 $s_n$  を決定する整数を係数とする方程式は、 $n=5, 6$  で6次方程式、 $n=7$  で12次方程式であった。整数の平方根を係数に含んでもよいとした場合は、 $n=5, 6, 7$  のいずれも3次方程式であった。

表3  $k_n, s_n$  の値

$n$	$k_n$	$s_n$
1	1	1
2	$\sqrt{2}$	3
3	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$2\sqrt{2}+2$
4	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$	$2\sqrt{3}+3$
5	2.113924194	7.937350999
6	2.266895241	9.277628070
7	2.398771878	10.50821304

$n=8$  に対しては、連立方程式を立てることは容易にできたが、それを解こうとすると数式処理ソフトウェアを使っても中間式膨張を引き起こし、結果を導くところまで至っていない。このように計算が困難な状況に陥るのは、 $s_n$  を解として持つ代数方程式を正確に求めようとしているからである。

正確な代数方程式を求めることを諦めることにすれば、最急降下法のような数値計算により  $s_n$  の近似値を計算することは容易である。筆者が行った計算では  $8 \leq n \leq 15$  の場合の  $k_n, s_n$  は表4のようになる。

表 4 数値計算による  $k_n, s_n$  の値

$n$	$k_n$	$s_n$
8	2.514661322	11.647043134
9	2.618017985	12.708036347
10	2.711286536	13.702149367
11	2.796260260	14.638142886
12	2.874293491	15.523126153
13	2.946434018	16.362946846
14	3.013509074	17.162473879
15	3.076183168	17.925805769

## 参 考 文 献

- [1] 岩田至康, 和算における杉成算について(1), 数学史研究, 109 (1986), 32-43.
- [2] 北原勲, 杉成算について, 数学史研究, 213 (2012), 1-10.
- [3] 平田浩一, 算変法不変式がつくる座標系について, 松山大学論集, 34-1(2022), 57-103.