松 山 大 学 論 集
第 34 巻 第 5 号 抜 刷
２ ０ ２ ２ 年 12 月 発 行

ドーマーに関する財政の持続可能性について

―― ソローモデルでの分析 ――

小 西 邦 彦

ドーマーに関する財政の持続可能性について
―― ソローモデルでの分析 ――

小　西　邦　彦

概　　要

本稿では，ドーマー命題とそこから派生したドーマー条件と呼ばれる財政の持続可能性に関する財政ルールについて考察を行う。まず，ドーマー命題とドーマー条件の理論モデルについて比較し，これらの違いを明らかにする。そして，ソローの外生的成長モデル（ソローモデル）へと拡張してドーマー命題とドーマー条件の財政の持続可能性が保証される条件について分析を行う。主な結果は以下の通りである。財政赤字対 GDP 比を一定とするルール（ソローモデルにおけるドーマー命題）のもとでは，初期の効率的労働 1 単位当たりの公債残高が十分小さい値であれば財政の持続可能性を保証できる。そして，初期の効率的労働 1 単位当たりの物的資本が大きいほど，この上限の値も大きくなる。次に，基礎的財政収支対 GDP 比を一定とするルール（ソローモデルにおけるドーマー条件）のもとでは，効率的労働の増加率が利子率よりも大きければ，基礎的財政収支が赤字，均衡，黒字のいずれであっても財政の持続可能性が保証される。しかし，効率的労働の増加率が利子率よりも小さいとき，基礎的財政収支が黒字であることに加えて初期の効率的労働 1 単位当たりの公債残高が十分小さい値であれば財政の持続可能性を保証することができる。そして，初期の効率的労働 1 単位当たりの物的資本が大きいほど，この上限の値も大きくなる。

1. は　じ　め　に

1990年代から，日本では少子高齢化による社会保障費の増大によって財政状況が悪化している。図1の先進国の政府債務残高対GDP比の推移からも分かる通り，2000年頃に先進国の中で最も高い値を記録し，その後も増加傾向が続いている。2021年の日本の政府債務残高対GDP比は約240%であり，2番目に高いイタリアの約175%よりも非常に高い値を記録していることが分かる。

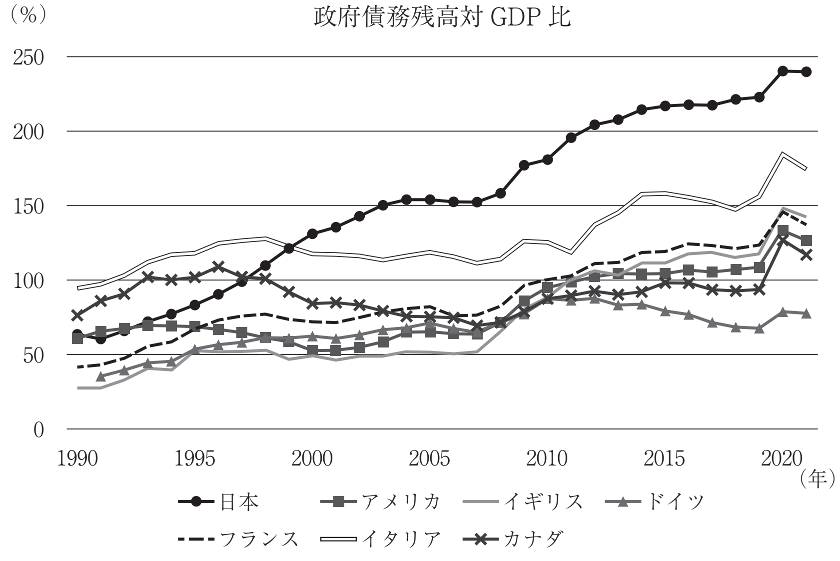

図1：先進国の政府債務残高対GDP比の推移

（出典：OECD Economic Outlook No 111より作成）

この期間の日本の財政健全化目標については以下の通りである。2002年6月25日に閣議決定された「経済財政運営と構造改革に関する基本方針2002」において，かつて掲げていた「特例公債依存からの脱却」という目標から「国と地方を合わせた基礎的財政収支（プライマリーバランス）の黒字化」という

新しい目標を掲げるようになった[1]。また，2006年7月7日に閣議決定された「経済財政運営と構造改革に関する基本方針2006」では，基礎的財政収支の黒字化に加えて，「黒字化を達成した後も，政府債務残高対GDP比の発散を止め安定的に引き下げることを確保する。」という目標も追加された。その後，2009年6月23日に閣議決定された「経済財政改革の基本方針2009」では，「今後10年以内に国・地方のプライマリー・バランス黒字化の確実な達成を目指す。まずは，5年を待たずに国・地方のプライマリー・バランス赤字（景気対策によるものを除く）の対GDP比を少なくとも半減させることを目指す。」という形で目標達成時期の先延ばしが行われた。さらに，2018年6月15日に閣議決定された「経済財政運営と改革の基本方針2018」では，「経済財政と財政健全化に着実に取り組み，2025年度の国・地方を合わせたPB黒字化を目指す。同

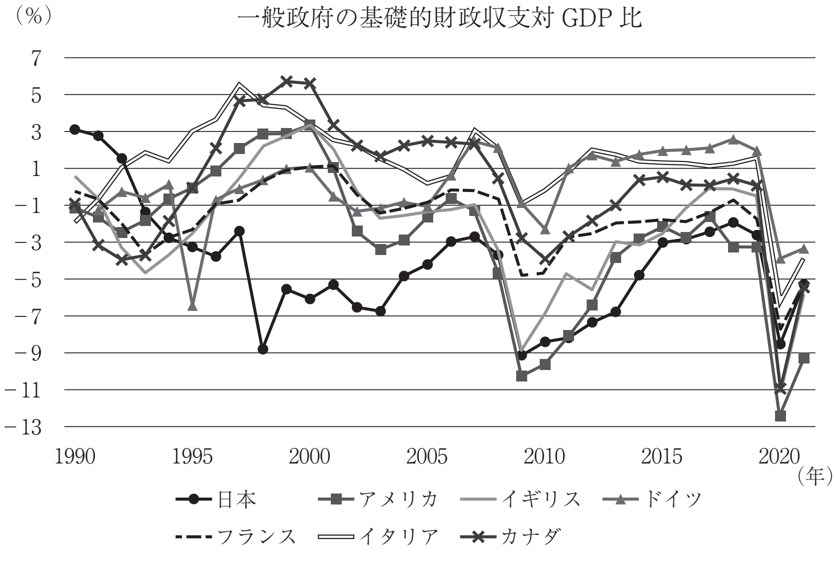

図2：先進国の基礎的財政収支対GDP比の推移

（出典：OECD Economic Outlook No 111より作成）

1）基礎的財政収支とは，公債の発行，利払い，償還の影響を除いた財政収支のことである。

時に債務残高対 GDP 比の安定的な引下げを目指すことを堅持する。」という形でさらに 5 年先延ばしされることとなった[2]。これらの目標の達成状況については，図 2 の先進国の基礎的財政収支対 GDP 比の推移から分かる通り，2021 年まで基礎的財政収支の黒字化は 1 度も達成したことがないという状態である。

日本において，基礎的財政収支の黒字化が目標となった背景には「ドーマー条件」と呼ばれる財政の持続可能性の議論があると考えられる。このドーマー条件とは，「基礎的財政収支が均衡しているとき，経済成長率が利子率を上回れば，政府債務残高対 GDP 比は発散せずに一定の値に収束する」というものである。ここで，ドーマーという名前が付いているのは Domer（1944）の論文から派生したものであるからである。Domer（1944）では，財政の持続可能性の議論において，「公債発行（財政赤字）が GDP の一定割合であれば，政府債務残高対 GDP 比は発散せずに一定の値に収束する」ということを主張している。これを本稿では「ドーマー命題」と呼ぶ。Domer（1944）の論文では基礎的財政収支に関する言及はなく，ドーマー条件は日本においてドーマー命題から派生したものであるといわれているが，この 2 つの理論モデルが混同されている状態であると指摘されている[3]。

このような背景から，本稿では最初にドーマー命題とドーマー条件の理論モデルについて詳しい比較を行い，これらの違いを明らかにする。そして，この 2 つの理論モデルは政府の予算制約のみに限定して財政の持続可能性を議論しているので，Solow（1956）の外生的成長モデル（ソローモデル）へと拡張し，財政の持続可能性が保証される条件についての考察を行う。ソローモデルとは，生産関数を設定した上で物的資本の蓄積と労働力（人口）の増加と技術進歩の 3 つの要素によって経済成長が実現されるというモデルである。ドーマー命題とドーマー条件の議論では初期の GDP と経済成長率を外生変数として扱って

2）日本の財政健全化目標とその変遷については，財務省の「日本の財政関係資料（令和 2 年 7 月）」を参照。

3）日本においてドーマー条件が出現した経緯については畑野先生のブログに詳細が記載されている。

いるので，これらよりも一歩踏み込んだ考察を行うことが可能となる。

2．ドーマー命題とドーマー条件

2.1. ドーマー命題について

まず，ドーマー命題について説明する。t 期における政府債務（公債）残高を B_t，税収を T_t，（公債への利払いを除いた）政府支出を G_t，利子率を r_t と表記する。t 期における政府の予算制約は

$$B_{t+1} - B_t + T_t = G_t + r_t B_t. \tag{1}$$

$B_{t+1} - B_t$ は公債発行収入を表すので，(1)式の左辺は政府の収入を表す。右辺は公債の利払いも含めた政府の支出を表す。Domar（1944）に従って政府は財政赤字（公債発行収入）が GDP（国内総生産）に対して一定の割合 $\mu > 0$ となる財政ルールを採用していると仮定すると，以下のようになる：

$$G_t + r_t B_t - T_t = B_{t+1} - B_t = \mu Y_t, \tag{2}$$

ここで，Y_t は GDP を表す。公債残高対 GDP 比を $z_t \equiv \frac{B_t}{Y_t}$ と表すと以下を得る：

$$\frac{z_{t+1}}{z_t} = \frac{\frac{B_{t+1}}{Y_{t+1}}}{\frac{B_t}{Y_t}} = \frac{\frac{B_{t+1}}{B_t}}{\frac{Y_{t+1}}{Y_t}}. \tag{3}$$

経済成長率（GDP の成長率）は $\gamma > 0$ で一定であるとすると，$\gamma = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t}$ と表すことができる。これと(2)式と(3)式を利用すると

$$\frac{z_{t+1}}{z_t} = \frac{\frac{B_t + \mu Y_t}{B_t}}{\frac{Y_{t+1}}{Y_t}} = \frac{1 + \frac{\mu}{z_t}}{1 + \gamma}.$$

これを整理すると z_t の動学式は

$$z_{t+1}=\frac{\mu}{1+\gamma}+\frac{1}{1+\gamma}z_t. \tag{4}$$

この動学式から図 3 のように z_t の動学を記述することができ，z_t は定常状態に安定的に収束することが分かる[4]。そして，定常状態の z_t の値は(4)式から以下の通りである：

$$z^*=\frac{\mu}{\gamma}. \tag{5}$$

これらの結果より，政府が財政赤字を GDP に対して一定の割合であるという財政ルールを採用すれば，公債残高対 GDP 比は発散せずに(5)式の一定の値に収束することが分かる。

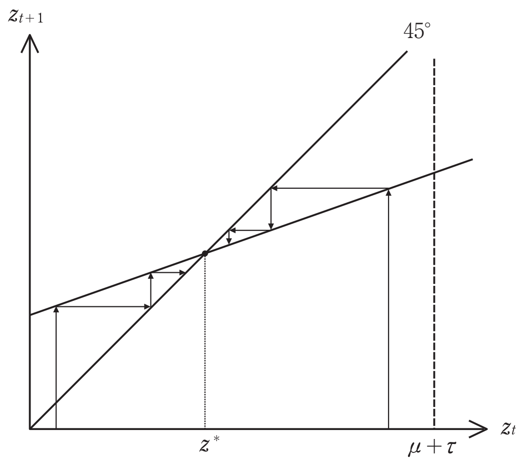

図 3 ：ドーマー命題における z_t の動学

4）図示する方法ではなく，(4)式を利用してドーマー命題における z_t の動学式を解くことによって同様の結果を得ることができる。詳細は補論 A を参照。

一般に，上記までの説明がドーマー命題に関する議論で行われる説明であるが，政府支出 G_t が正になる条件が考慮されていないため，ここでその条件を考える。(2)式より

$$G_t = \mu Y_t - r_t B_t + T_t. \tag{6}$$

経済成長率と同様に利子率も一定であると仮定し，税収は GDP に一定の税率 $\tau > 0$ を課したものに等しくなるとすると，それぞれ $r_t = r$ かつ $T_t = \tau Y_t$ と表すことができる。これらを用いると以下を得る：

$$\frac{G_t}{Y_t} = \mu + \tau - r z_t. \tag{7}$$

よって，$G_t > 0$ となる条件は

$$z_t < \frac{\mu + \tau}{r}. \tag{8}$$

定常状態においても(8)式は成り立たなければいけないので，$\dfrac{\mu}{\gamma} < \dfrac{\mu + \tau}{r}$ を仮定しなければいけない。この条件を整理すると

$$\tau > \frac{(r - \gamma)\mu}{\gamma}. \tag{9}$$

$r < \gamma$ のときには(9)式は常に成り立つが，$r \geq \gamma$ のときには τ に下限が存在することを意味している。そして，移行過程においても常に $G_t > 0$ が成り立つことを保証しなければいけないので，以下を仮定する：

$$z_0 < \frac{\mu + \tau}{r}. \tag{10}$$

これらの結果から，財政赤字対 GDP 比を $\mu > 0$ とする財政ルールのもとでは初期の公債残高対 GDP 比が(10)式を満たせば，安定的に定常状態へと収束し，

公債残高の増加率は経済成長率と同じ値となって財政の持続可能性が保証される。⑽式の条件より，初期の GDP が大きいほど初期の公債残高の上限が大きくなるということが分かる[5]。

2.2. ドーマー条件について

次に，ドーマー条件について説明する。t 期における政府の予算制約は⑴式と同じである。しかし，政府は基礎的財政収支が GDP に対して一定の割合 θ となる財政ルールを採用していると仮定するので，以下のように表される：

$$G_t - T_t = B_{t+1} - B_t - r_t B_t = \theta Y_t. \tag{11}$$

ドーマー条件の議論の際には一般的に基礎的財政収支の均衡（$\theta = 0$）が仮定されるが，本稿では基礎的財政収支の赤字（$\theta > 0$）や基礎的財政収支の黒字（$\theta < 0$）となるケースについても考える[6]。ドーマー条件においては経済成長率は $\gamma > 0$ で一定であることに加えて利子率も一定であると仮定するので，$r_t = r$ とする。ここでも⑶式は成り立つので，⑶式と⑹式を利用すると以下を得る：

$$\frac{z_{t+1}}{z_t} = \frac{\dfrac{B_t + rB_t + \theta Y_t}{B_t}}{\dfrac{Y_{t+1}}{Y_t}} = \frac{1 + r + \dfrac{\theta}{z_t}}{1 + \gamma}.$$

これを整理すると z_t の動学式は

$$z_{t+1} = \frac{\theta}{1+\gamma} + \frac{1+r}{1+\gamma} z_t. \tag{12}$$

5）初期の GDP について，ここでは外生変数であるとして扱っている。次節のソローモデルでは生産関数が考慮されているので，初期の GDP も生産要素の初期量によって決定されるようになる。

6）基礎的財政収支の黒字が公債の利払いよりも小さいとき，財政収支は赤字となる。こういったケースが存在するため，本稿では基礎的財政収支の黒字のケースも排除せずに考えている。

この式から，定常状態の z_t の値を計算すると以下の通りである：

$$z^* = \frac{\theta}{\gamma - r}. \tag{13}$$

ドーマー条件のもとでも政府支出 G_t が正になる条件を考える。(2)式より

$$G_t = \theta Y_t + T_t. \tag{14}$$

ここでも税収は GDP に一定率の税率 $\tau > 0$ を課したものに等しくなるとすると，$T_t = \tau Y_t$ と表すことができる。これを用いると以下を得る：

$$\frac{G_t}{Y_t} = \theta + \tau. \tag{15}$$

よって，$G_t > 0$ となる条件は $\theta + \tau > 0$ であるため，基礎的財政収支の均衡（$\theta = 0$）と赤字（$\theta > 0$）のときは常に $G_t > 0$ が成り立ち，基礎的財政収支の黒字（$\theta < 0$）のときは $\theta + \tau > 0$ を仮定しなければいけないことが分かる。

2.2.1. 基礎的財政収支が均衡のケース

最初に基礎的財政収支の均衡（$\theta = 0$）のケースについて考え，その後に基礎的財政収支の赤字（$\theta > 0$）と黒字（$\theta < 0$）のそれぞれのケースについて考えていく。[7] 図 4 は基礎的財政収支の均衡（$\theta = 0$）のケースを図示したもので，図 4 の左側は $\gamma > r$ のケースであり，図 4 の右側は $\gamma < r$ のケースである。本稿では初期に政府が債務を抱えている状況を考えるので，$z_0 > 0$ であるとする。よって，図 4 から分かる通り，経済成長率が利子率よりも大きければ ($\gamma > r$)，$z^* = 0$ の定常状態に安定的に収束し，経済成長率が利子率よりも小さければ ($\gamma < r$)，定常状態に収束できずに $z_t \to \infty$ へ発散してしまうことが分かる。

7）図示する方法ではなく，(12)式を利用してドーマー条件における z_t の動学式を解くことによって同様の結果を得ることができる。詳細は補論 B を参照。

ここで，１点注意しなければいけないことがある。それは⑾式より，公債残高の増加率が $\frac{B_{t+1}-B_t}{B_t}=r$ で経済成長率が $\frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t}=\gamma$ であるため，$z^*=0$ の定常状態へ安定的に収束するというケース（$\gamma>r$）は公債残高の増加よりも大きく経済が成長しているということを表している。つまり，政府は債務を返済するわけではなく，経済成長によって一定程度の債務を抱え続けることが可能であるということを意味している。

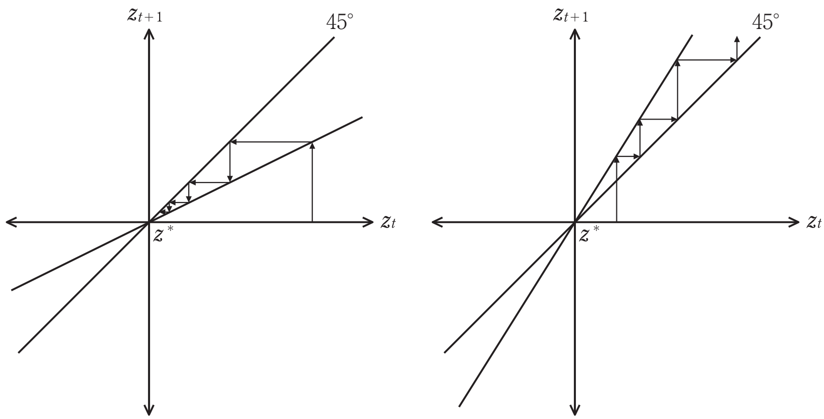

図４：ドーマー条件で $\theta=0$ における z_t の動学
（左側は $\gamma>r$ のケース，右側は $\gamma<r$ のケース）

2.2.2. 基礎的財政収支が赤字のケース

図５は基礎的財政収支の赤字（$\theta>0$）のケースを図示したもので，図５の左側は $\gamma>r$ のケースであり，図５の右側は $\gamma<r$ のケースである。ここでも $z_0>0$ であるとすると，図５から分かる通り，経済成長率が利子率よりも大きければ（$\gamma>r$），$z^*=\frac{\theta}{\gamma-r}>0$ の定常状態に安定的に収束し，経済成長率が利子率よりも小さければ（$\gamma<r$），定常状態に収束できずに $z_t\to\infty$ へ発散してしまうことが分かる。

基礎的財政収支の赤字（$\theta > 0$）のケースでは定常状態が $z^* > 0$ であるため，長期的には公債残高の増加率が経済成長率と一致することになる。よって，このケースでも政府は債務を返済するわけではなく，経済成長によって一定程度の債務を抱え続けることが可能であるということを意味している。

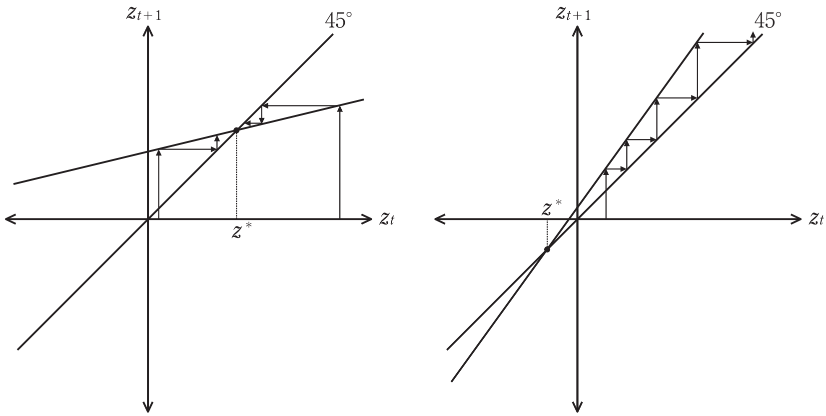

図 5 ：ドーマー条件で $\theta > 0$ における z_t の動学

（左側は $\gamma > r$ のケース，右側は $\gamma < r$ のケース）

2.2.3. 基礎的財政収支が黒字のケース

図 6 は基礎的財政収支の黒字（$\theta < 0$）のケースを図示したもので，図 6 の左側は $\gamma > r$ のケースであり，図 6 の右側は $\gamma < r$ のケースである。ここでも初期の公債残高が正の状況を考えるので $z_0 > 0$ であるとする。よって，図 6 から分かる通り，経済成長率が利子率よりも大きければ（$\gamma > r$），公債残高対 GDP 比は定常状態の z^* へ安定的に収束し，経済成長率が利子率よりも小さければ（$\gamma < r$），公債残高対 GDP 比は定常状態に収束できずに $z_t \to -\infty$ もしくは $z_t \to \infty$ へ発散してしまうことが分かる。しかしながら，基礎的財政収支が黒字のときは赤字のときと異なり注意しなければいけない点がある。それは公債残高対 GDP 比の z_t が負の値になり得るという点である。つまり，政府が債

務を完済して資産を持つようになるということを表している。この点を詳しく考えるために，(6)式から財政収支を計算すると

$$B_{t+1}-B_t=\theta Y_t+rB_t. \tag{16}$$

両辺を Y_t で割ると

$$\frac{B_{t+1}-B_t}{Y_t}=\theta+rz_t. \tag{17}$$

この式から $z_t<-\dfrac{\theta}{r}$ のときは財政収支が黒字となり，$z_t>-\dfrac{\theta}{r}$ のときは財政収支が赤字となることが分かる。よって，$0<z_t<-\dfrac{\theta}{r}$ であれば，政府は債務を返済できるようになり，財政ルールを継続すると資産を持つようになる。ただし，現実世界を考えると政府が巨大な資産を持つという状況は考えにくく，その前に均衡財政への財政ルールの変更が実施されるであろうと考えるのが妥当である。[8] 本稿の主な焦点は財政の持続可能性にあるため，どのような政策変更が妥当であるかという点については言及しないが，こういった状況は公債残高対 GDP 比が発散しないため財政の持続可能性が保証されているといえる。

これらの結果から，経済成長率が利子率よりも小さい（$\gamma<r$）としても，基礎的財政収支が黒字（$\theta<0$）で初期の公債残高対 GDP 比が定常状態の値よりも小さければ（$z_0<z^*$），政府は債務を完済できることが分かる。よって，z_t は一定の値に収束はしないが，このケースも財政の持続可能性は保証されると考える方が妥当であるといえる。経済成長率が利子率よりも低いのに，なぜ政府は債務を完済することができるのか？　この理由について考える。まず，$-\dfrac{\theta}{r}<z^*$ であるため $-\dfrac{\theta}{r}<z_t<z^*$ のときは財政収支が赤字でありながら

8）実際に 1960 年代前半の日本では，高度経済成長に支えられて租税の自然増収が生じていたため，自然増収を財源として政府支出の増額や減税を行い，年度内の収支を調整するという均衡財政主義（国債の不発行）が採用されていた。

z_t は減少していくという範囲である。これは公債の利払いの一部が基礎的財政収支の黒字分で賄われることによって，公債残高の増加が GDP の増加よりも小さくなるためである。そして，$z_t < -\dfrac{\theta}{r}$ となった後は財政収支が黒字となり，政府は債務を完済することが可能となる。

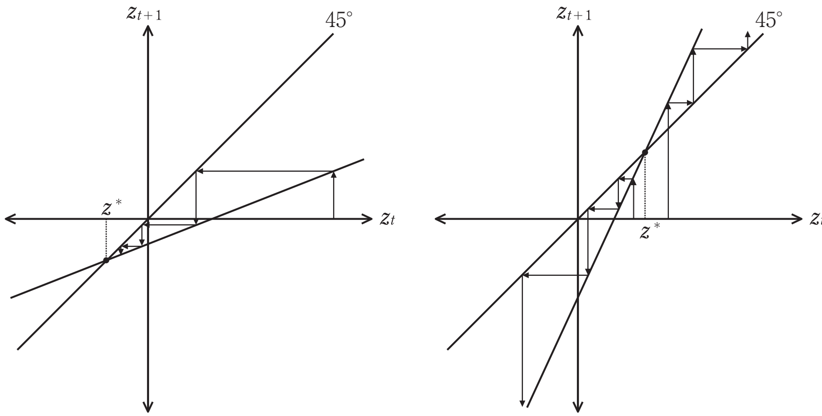

図６：ドーマー条件で $\theta < 0$ における z_t の動学

（左側は $\gamma > r$ のケース，右側は $\gamma < r$ のケース）

これまでの結果から分かることをまとめると以下の通りである。基礎的財政収支対 GDP 比を θ とする財政ルールのもとでは経済成長率が利子率よりも大きければ，安定的に定常状態へと収束して財政の持続可能性が保証される。ただし，経済成長率が利子率よりも小さいときでも，$\theta < 0$ かつ $z_0 < \dfrac{\theta}{\gamma - r}$ であれば政府は債務を完済することができるため，均衡財政への移行などによって財政の持続可能性を保証することができる。

３．ソローモデルへの拡張

3.1. ソローモデルの概観

ここではソローモデルの概観を説明する。まず，生産関数は以下を仮定する：

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}, \tag{18}$$

K_t は物的資本ストックの量，L_t は総労働人口，A_t は技術水準を表す[9]。L_t の成長率（人口成長率）は $n>0$ で一定であり，A_t の成長率（技術進歩率）は $\phi>0$ で一定であるとすると，それぞれ $n=\frac{L_{t+1}-L_t}{L_t}$，$\phi=\frac{A_{t+1}-A_t}{A_t}$ と表すことができる。物的資本ストックの動学式は以下の通りとなる：

$$K_{t+1}-K_t = I_t - \delta K_t, \tag{19}$$

I_t は物的資本ストックへの投資量，$\delta>0$ は物的資本ストックの減耗率を表す。ソローモデルでは物的資本ストックへの投資量は GDP の一定割合であると仮定し，その投資率を $s>0$ と表すと，以下が成り立つ：

$$I_t = sY_t. \tag{20}$$

⒆式と⒇式を利用すると

$$K_{t+1}-K_t = sY_t - \delta K_t, \tag{21}$$

最後に財市場の均衡条件は

$$Y_t = C_t + I_t + G_t, \tag{22}$$

ここで，C_t は消費を表す。

これらの式を利用して，効率的労働1単位当たりの物的資本ストックの量 $k_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}$ の動学式を導出する。⒅式と㉑式より

9）本稿では技術水準の生産関数への入れ方について，ハロッド中立的技術進歩を仮定して均整成長経路の存在を保証している。ヒックス中立的技術進歩である $Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$ やソロー中立的技術進歩である $Y_t = (A_t K_t)^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$ では資本産出比率である $\frac{Y_t}{K_t}$ が長期的に一定となることはないため，均整成長経路は存在しないことが知られている。

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t}=s\left(\frac{K_t}{A_tL_t}\right)^{\alpha}+(1-\delta)\frac{K_t}{A_tL_t}.$$

$\dfrac{L_{t+1}}{L_t}=1+n$, $\dfrac{A_{t+1}}{A_t}=1+\phi$ と $k_t=\dfrac{K_t}{A_tL_t}$ を利用すると

$$k_{t+1}(1+\phi)(1+n)=sk_t^{\alpha}+(1-\delta)k_t.$$

よって，以下の動学式を得る：

$$k_{t+1}=\frac{sk_t^{\alpha}+(1-\delta)k_t}{(1+\phi)(1+n)}. \tag{23}$$

$\Delta k_t\equiv k_{t+1}-k_t$ として，(23)式より

$$\Delta k_t\gtreqless 0 \Leftrightarrow \frac{sk_t^{\alpha}+(1-\delta)k_t}{(1+\phi)(1+n)}\gtreqless k_t,$$

$$\Delta k_t\gtreqless 0 \Leftrightarrow k_t\lesseqgtr \frac{sk_t^{\alpha}}{(1+\phi)(1+n)-(1-\delta)},$$

$$\Delta k_t\gtreqless 0 \Leftrightarrow k_t\lesseqgtr \left[\frac{s}{(1+\phi)(1+n)-(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{24}$$

よって，定常状態の k_t の値は $k^*=\left[\dfrac{s}{(1+\phi)(1+n)-(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ となる。したがって，$k_t<k^*$ であれば k_t は増加し，$k_t>k^*$ であれば k_t は減少し，最終的に $k_t=k^*$ へと安定的に収束する。ソローモデルでは人口成長率と技術進歩率は一定率で成長し，物的資本への投資も GDP の一定割合であるとしているので，k_t の動学に公債残高や政府支出の影響を受けず，政府の活動とは独立して決定されることになる。

最後に(18)式を利用して GDP の成長率を計算すると

$$\frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t}=\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha}\left(\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t}\right)^{1-\alpha}-1,$$

$\frac{L_{t+1}}{L_t}=1+n,\ \frac{A_{t+1}}{A_t}=1+\phi$ と(21)式を利用すると

$$\frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t}=[(1+\phi)(1+n)]^{1-\alpha}(sk_t^{\alpha-1}+1-\delta)^{\alpha}-1. \tag{25}$$

$k^*=\left[\frac{s}{(1+\phi)(1+n)-(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ を利用すると，定常状態における Y_t の成長率は

$$\left(\frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t}\right)^*=(1+\phi)(1-n)-1. \tag{26}$$

よって，長期的な経済成長率は貯蓄率には影響されず，人口成長率と技術進歩率のみで決定されることが分かる。

3.2. ソローモデルにおけるドーマー命題

これまでの結果を利用して，ソローモデルのもとでのドーマー命題を考察する。ソローモデルにおいても t 期における政府の予算制約は(1)式と同じである。政府は財政赤字（公債発行収入）が GDP に対して一定の割合 $\mu>0$ となる財政ルールを採用していると仮定するため，(2)式がここでも成り立つ。

$b_t\equiv\frac{B_t}{A_tL_t}$ として，(2)式と(18)式を利用すると

$$\frac{b_{t+1}}{b_t}=\frac{\frac{B_t+\mu Y_t}{B_t}}{\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t}}=\frac{1+\mu\frac{k_t^{\alpha}}{b_t}}{(1+\phi)(1+n)}. \tag{27}$$

(27)式より，b_t の動学は k_t の影響を受けることが分かる。$\Delta b_t\equiv b_{t+1}-b_t$ として，(27)式を利用すると

$$\Delta b_t \gtreqless 0 \Leftrightarrow \frac{1+\mu \dfrac{k_t^{\alpha}}{b_t}}{(1+\phi)(1+n)} \gtreqless 1,$$

$$\Delta b_t \gtreqless 0 \Leftrightarrow \mu k_t^{\alpha} + b_t \gtreqless (1+\phi)(1+n) b_t,$$

$$\Delta b_t \gtreqless 0 \Leftrightarrow b_t \lesseqgtr \frac{\mu k_t^{\alpha}}{(1+\phi)(1+n)-1}. \tag{28}$$

この結果と(24)式より，図７のように $\Delta b_t = 0$ 線と $\Delta k_t = 0$ 線を描くことができ，この経済の位相図を図示することが可能となる。

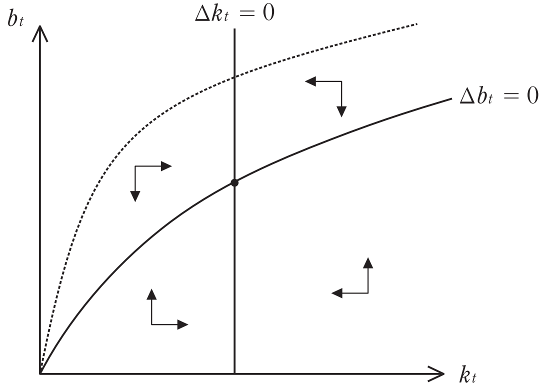

図７：ソローモデルにおけるドーマー命題の位相図

政府支出 G_t と消費 C_t が正となる条件を考える。(2)式より，政府支出 G_t は以下のように表すことができる：

$$G_t = \mu Y_t - r_t B_t + T_t. \tag{29}$$

ここでも利子率は一定であるとして，$r_t = r$ とする。税収は GDP に一定率の税率 $\tau > 0$ を課したものに等しくなるとすると，$T_t = \tau Y_t$ と表すことができる。これらを(29)式に代入すると以下を得る：

$$g_t = (\mu + \tau) k_t^{\alpha} - r b_t. \tag{30}$$

$g_t \equiv \dfrac{G_t}{A_t L_t}$ であるので，$g_t > 0$ のときは $G_t > 0$ が成り立つ。(30)式より $G_t > 0$ が成り立つ条件は

$$b_t < \frac{\mu + \tau}{r} k_t^{\alpha}. \tag{31}$$

図 7 の点線は $b_t = \dfrac{\mu + \tau}{r} k_t^{\alpha}$ を表しており，この点線よりも下側であれば $G_t > 0$ が保証される。よって，図 7 から分かる通り，$b_t = \dfrac{\mu + \tau}{r} k_t^{\alpha}$ は $\Delta b_t = 0$ 線よりも上側に位置しないといけないので，この条件は以下の通りである：

$$\frac{\mu}{(1+\phi)(1+n)-1} < \frac{\mu + \tau}{r}.$$

この不等式を整理すると

$$\tau > \frac{1 + r - (1+\phi)(1+n)}{(1+\phi)(1+n)-1} \mu. \tag{32}$$

$1 + r < (1+\phi)(1+n)$ のときには(32)式は常に成り立つが，$1 + r \geq (1+\phi)(1+n)$ のときには τ に下限が存在することを意味している。

消費 C_t が正となる条件は財市場の均衡条件を考えればよいので，(20)式と(22)式と(29)式より

$$C_t = (1 - s - \mu - \tau) Y_t + r B_t. \tag{33}$$

分析の対象は $B_t > 0$ に限定されているので，$1 - s - \mu - \tau > 0$ を仮定すれば $C_t > 0$ は常に成り立つことが確認できる。

これらの結果から，ソローモデルにおいても財政赤字対 GDP 比を $\mu > 0$ とする財政ルールのもとでは初期の効率的労働 1 単位当たりの公債残高が(31)式を

満たせば，安定的に定常状態へと収束し，公債残高の増加率は経済成長率と同じ値となって財政の持続可能性が保証される。図 7 より，財政の持続可能性が保証される初期の k_t と b_t の閾値の関係について，k_0 が小さければ b_0 も小さく，k_0 が大きければ b_0 も大きいという関係であることが分かる。

3. 3. ソローモデルにおけるドーマー条件

次に，ソローモデルにおけるドーマー条件について分析を行う。ここでも，t 期における政府の予算制約は(1)式と同じであり，政府は基礎的財政収支がGDP に対して一定の割合 θ となる財政ルールを採用していると仮定するので，(6)式が成り立つ。利子率が一定であることはここでも仮定するので，$r_t=r$ とする。(3)式と(6)式を利用すると以下を得る：

$$\frac{b_{t+1}}{b_t}=\frac{\frac{B_t+rB_t+\theta Y_t}{B_t}}{\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t}}=\frac{1+r+\theta\frac{k_t^{\alpha}}{b_t}}{(1+\phi)(1+n)}.$$

この式より

$$\Delta b_t \gtreqless 0 \Leftrightarrow \frac{1+r+\theta\frac{k_t^{\alpha}}{b_t}}{(1+\phi)(1+n)} \gtreqless 1,$$

$$\Delta b_t \gtreqless 0 \Leftrightarrow \theta k_t^{\alpha}+(1+r)b_t \gtreqless (1+\phi)(1+n)b_t,$$

$$\Delta b_t \gtreqless 0 \Leftrightarrow [(1+\phi)(1+n)-(1+r)]b_t \lesseqgtr \theta k_t^{\alpha}. \tag{34}$$

よって，以下の 2 通りに場合分けできる。$(1+\phi)(1+n)>1+r$ のときは

$$\Delta b_t \gtreqless 0 \Leftrightarrow b_t \lesseqgtr \frac{\theta k_t^{\alpha}}{(1+\phi)(1+n)-(1+r)}. \tag{35}$$

$(1+\phi)(1+n)<1+r$ のときは

$$\Delta b_t \gtreqless 0 \Leftrightarrow b_t \gtreqless \frac{\theta k_t^{\alpha}}{(1+\phi)(1+n)-(1+r)}. \tag{36}$$

これらの結果と(24)式を利用して，この経済の位相図を図示することができる。

ドーマー条件のもとでも政府支出 G_t と消費 C_t が正となる条件を考える。(11)式より，政府支出 G_t は以下のように表すことができる：

$$G_t = \theta Y_t + T_t. \tag{37}$$

税収は GDP に一定率の税率 $\tau > 0$ を課したものに等しくなるとして，$T_t = \tau Y_t$ と表すことができる。これらを上記の式に代入すると以下を得る：

$$G_t = (\theta + \tau) Y_t. \tag{38}$$

よって，$G_t > 0$ となる条件は $\theta + \tau > 0$ であるため，基礎的財政収支の均衡（$\theta = 0$）と赤字（$\theta > 0$）のときは常に $G_t > 0$ が成り立ち，基礎的財政収支の黒字（$\theta < 0$）のときは $\theta + \tau > 0$ を仮定しなければいけないことが分かる。

消費 C_t が正となる条件は財市場の均衡条件を考えればよいので，(20)式と(22)式と(38)式より

$$C_t = (1 - s - \theta - \tau) Y_t. \tag{39}$$

$1 - s - \theta - \tau > 0$ を仮定すれば $C_t > 0$ は常に成り立つことが確認できる。

3.3.1.　基礎的財政収支が均衡のケース

第2.2節と同様に，まず基礎的財政収支の均衡（$\theta = 0$）のケースについて考え，その後に基礎的財政収支の赤字（$\theta > 0$）と黒字（$\theta < 0$）のそれぞれのケースについて考えていく。図8は基礎的財政収支の均衡（$\theta = 0$）のケースの位相図を図示したもので，図8の左側は $(1+\phi)(1+n) > 1 + r$ のケースであり，図8の右側は $(1+\phi)(1+n) < 1 + r$ のケースである。本稿では初期に政府

が債務を抱えている状況を考えるので，$b_0>0$ であるとする。よって，図８より，$(1+\phi)(1+n)>1+r$ であれば，$k_t=k^*$ かつ $b_t=b^*=0$ の定常状態に安定的に収束し，$(1+\phi)(1+n)<1+r$ であれば，$k_t=k^*$ の定常状態に収束できるが，$b_t\to\infty$ へ発散してしまうことが分かる。

第 2.2.1 節と同様に，公債残高の増加率が $\frac{B_{t+1}-B_t}{B_t}=r$ であるため，$b^*=0$ の定常状態へ安定的に収束するという $(1+\phi)(1+n)>1+r$ のケースは公債残高の増加よりも大きく経済が成長しているということを表しており，経済成長によって一定程度の債務を抱え続けることが可能であるということを意味している。

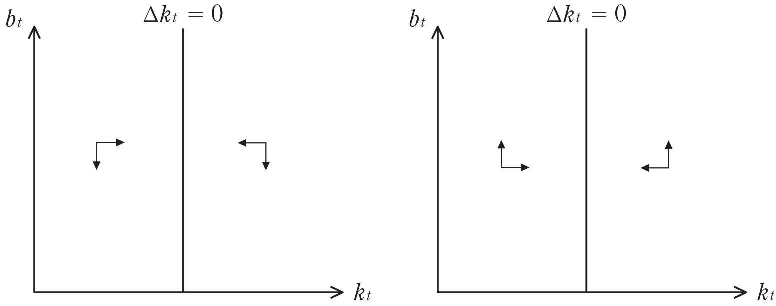

図８：ソローモデルにおけるドーマー条件の位相図（$\theta=0$）
（左側は $(1+\phi)(1+n)>1+r$ のケース，右側は $(1+\phi)(1+n)<1+r$ のケース）

3.3.2. 基礎的財政収支が赤字のケース

図９は基礎的財政収支の赤字（$\theta>0$）のケースを図示したもので，図９の左側は $(1+\phi)(1+n)>1+r$ のケースであり，図９の右側は $(1+\phi)(1+n)<1+r$ のケースである。ここでも $b_0>0$ であるとすると，図９より，$(1+\phi)(1+n)>1+r$ であれば，$k_t=k^*$ かつ $b_t=b^*>0$ の定常状態に安定的に収束し，$(1+\phi)(1+n)<1+r$ であれば，$k_t=k^*$ の定常状態に収束できるが，$b_t\to\infty$ へ発散してしまうことが分かる。

第2.2.2節と同様に，基礎的財政収支の赤字（$\theta>0$）のケースでは定常状態が $b^*>0$ であるため，長期的には公債残高の増加率が経済成長率と一致することになる。よって，このケースでも政府は債務を返済するわけではなく，経済成長によって一定程度の債務を抱え続けることが可能であるということを意味している。

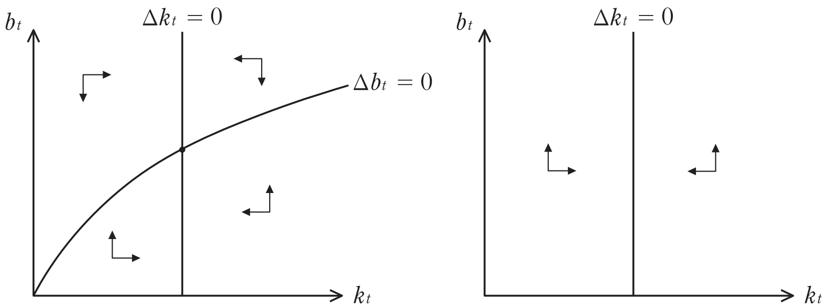

図9：ソローモデルにおけるドーマー条件の位相図（$\theta>0$）

（左側は $(1+\phi)(1+n)>1+r$ のケース，右側は $(1+\phi)(1+n)<1+r$ のケース）

3.3.3. 基礎的財政収支が黒字のケース

図10は基礎的財政収支の黒字（$\theta<0$）のケースを図示したもので，図10の左側は $(1+\phi)(1+n)>1+r$ のケースであり，図10の右側は $(1+\phi)(1+n)<1+r$ のケースである。ここでも $b_0>0$ であるとすると，図10から分かる通り，$(1+\phi)(1+n)>1+r$ であれば，$k_t=k^*$ かつ $b_t=b^*<0$ の定常状態に安定的に収束することができる。一方，$(1+\phi)(1+n)<1+r$ であれば，図10のように $k_t=k^*$ かつ $b_t=b^*>0$ の定常状態に収束する鞍点経路が存在する。k_t は $k_t=k^*$ の定常状態に収束できるが，b_t は鞍点経路の線よりも上側であれば $b_t\to+\infty$ へ発散し，鞍点経路の線よりも下側であれば $b_t\to-\infty$ へ発散することが分かる。第2.2.3節と同様に，基礎的財政収支が黒字のときは b_t が負の値になり得る。つまり，政府が債務を返済してしまい，資産を持つようになるという点には注意が必要である。やはり，現実世界を考えると政府が巨大な

資産を持つという状況は考えにくく，その前に均衡財政への財政ルールの変更が実施されるであろうと考えるのが妥当である。第 2.2.3 節と同様に本稿の主な焦点は財政の持続可能性にあるため，どのような政策変更が妥当であるかという点については言及しないこととする。

これらの結果から，$(1+\phi)(1+n)<1+r$ であるとしても，基礎的財政収支が黒字（$\theta<0$）で初期の効率的労働 1 単位当たりの公債残高が鞍点経路の線よりも小さければ，政府は債務を完済できるため，このケースも財政の持続可能性は保証されると考える方が妥当であるといえる。図 10 の鞍点経路より，財政の持続可能性が保証される初期の k_t と b_t の閾値の関係について，k_0 が小さければ b_0 も小さく，k_0 が大きければ b_0 も大きいという関係であることが分かる。また，この鞍点経路については $\Delta b_t=0$ 線が上側に位置しているほど財政の持続可能性が保証される初期の k_t と b_t の条件が緩くなる。(36)式より，

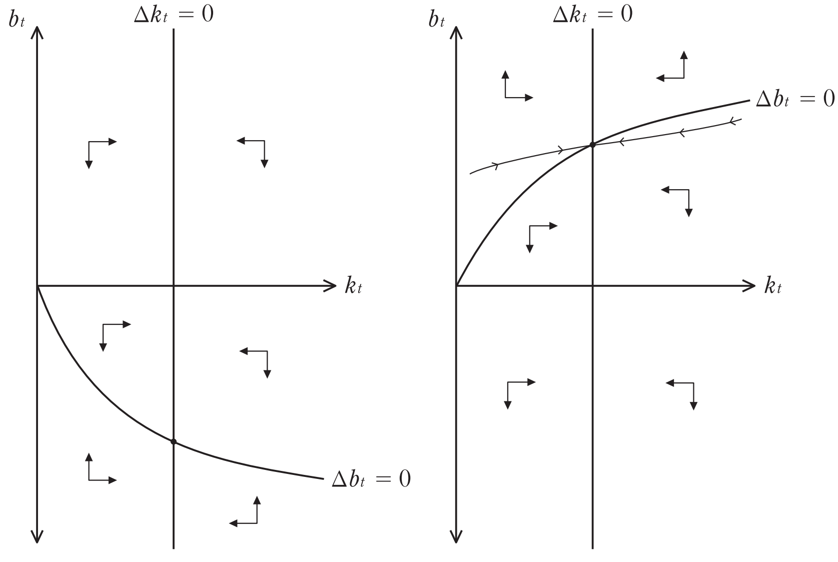

図10：ソローモデルにおけるドーマー条件の位相図（$\theta<0$）
（左側は $(1+\phi)(1+n)>1+r$ のケース，右側は $(1+\phi)(1+n)<1+r$ のケース）

$\Delta b_t=0$ 線がより上側に位置するのは，$(1+\phi)(1+n)<1+r$ を満たす範囲で，ϕ，n が大きく，r が小さいときである。さらに，基礎的財政収支の黒字対 GDP 比率が大きい（負の値である θ が小さい）ほど $\Delta b_t=0$ 線がより上側に位置することが分かる。

4．結　　論

本稿では，ドーマー命題とそこから派生したドーマー条件について，Solow（1956）の外生的成長モデルへと拡張して，財政の持続可能性が保証される条件について考察を行った。主な結果をまとめると以下の通りである。まず，財政赤字対 GDP 比を一定とするルール（ソローモデルにおけるドーマー命題）のもとでは，初期の効率的労働1単位当たりの公債残高が十分小さい値であれば財政の持続可能性を保証できる。そして，初期の効率的労働1単位当たりの物的資本が大きいほど，この上限の値も大きくなる。次に，基礎的財政収支対 GDP 比を一定とするルール（ソローモデルにおけるドーマー条件）のもとでは，効率的労働の増加率が利子率よりも大きければ，基礎的財政収支が赤字，均衡，黒字のいずれであっても財政の持続可能性が保証される。しかし，効率的労働の増加率が利子率よりも小さいとき，基礎的財政収支が黒字であることに加えて初期の効率的労働1単位当たりの公債残高が十分小さい値であれば財政の持続可能性を保証することができる。そして，初期の効率的労働1単位当たりの物的資本が大きいほど，この上限の値も大きくなる。

本稿のソローモデルへと拡張したドーマー命題やドーマー条件の財政の持続可能性の条件の特徴として，ドーマー命題については拡張前と同様の結果となり，貯蓄率や利子率や効率的労働の増加率といった変数は大きな影響を与えないことが分かる。また，ドーマー条件については利子率と効率的労働の増加率の大小関係が重要な役割を果たしているが，貯蓄率は大きな影響を与えていないことが分かる。ソローモデルでは，貯蓄率は移行過程の経済成長率の決定に影響を与えるが，長期的な経済成長率は効率的労働の増加率と等しくなる。ソ

ローモデルにおけるドーマー条件の結果から，財政の持続可能性には長期的な経済成長率の決定要因が重要であることが分かる。

最後に，今後の研究課題を挙げる。1点目として，本稿では Solow（1956）の外生的成長モデルを用いたため，長期的な経済成長率は外生変数である効率的労働の増加率である技術進歩率と人口成長率によって決定される構造となっている。本稿の生産関数を Romer（1986）の物的資本投資による経済成長モデルや Barro（1990）の生産的な政府支出による経済成長モデルへと拡張することによって，長期的な経済成長率が内定的に決定されるようになるため，財政の持続可能性について更なる考察を行うことが可能であると予想される。2点目として，ソローモデルでは物的資本への投資が GDP の一定割合であるという形で貯蓄率を一定と扱っている。代表的個人モデルや世代重複モデルなどといった家計部門の効用最大化による消費と貯蓄の決定問題を導入することによって，民間部門の貯蓄率を内生化することができる。この拡張によっても財政の持続可能性について更なる考察を行うことが可能であると予想される。

補　　　論

A. ドーマー命題の動学式を解く

⑷式を利用してドーマー命題における z_t の動学式を解く。⑷式に $z_t = X$ を代入して X について解くと

$$X = \frac{\mu}{\gamma}.$$

この値から⑷式は $\left(z_{t+1} - \frac{\mu}{\gamma}\right) = \frac{1}{1+\gamma}\left(z_t - \frac{\mu}{\gamma}\right)$ と表すことができるため，z_t の動学式は以下のように表すことができる：

$$z_t = \left(z_0 - \frac{\mu}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{1+\gamma}\right)^t + \frac{\mu}{\gamma}. \tag{A. 1}$$

この式から $\frac{1}{1+\gamma}<1$ であるので，z_t は定常状態に安定的に収束し，定常状態の値は以下の通りとなる：

$$\lim_{t\to\infty} z_t = z^* = \frac{\mu}{\gamma}. \tag{A. 2}$$

政府支出が正になる条件 $G_t>0$ は(9)式，(10)式と同じであるため，$\tau > \frac{(r-\gamma)\mu}{\gamma}$ かつ $z_0 < \frac{\mu+\tau}{r}$ を仮定すればよいことが分かる。

B. ドーマー条件の動学式を解く

補論 A と同様に，(12)式を利用してドーマー条件における z_t の動学式を解く。(12)式に $z_t=X$ を代入して X について解くと

$$X=\frac{\theta}{\gamma-r}.$$

この値から(12)式は $\left(z_{t+1}-\frac{\theta}{\gamma-r}\right)=\frac{1+r}{1+\gamma}\left(z_t-\frac{\theta}{\gamma-r}\right)$ と表すことができるため，z_t の動学式は以下のように表すことができる：

$$z_t=\left(z_0-\frac{\theta}{\gamma-r}\right)\left(\frac{1+r}{1+\gamma}\right)^t+\frac{\theta}{\gamma-r}. \tag{B. 1}$$

この式から $\frac{1+r}{1+\gamma}<1$ であれば，言い換えると経済成長率が利子率よりも大きければ（$\gamma>r$），z_t は定常状態に安定的に収束し，定常状態の値は以下の通りとなる：

$$\lim_{t\to\infty} z_t = z^* = \frac{\theta}{\gamma-r}. \tag{B. 2}$$

政府支出が正になる条件 $G_t>0$ は(15)式と同じであるため，$\theta+\tau>0$ を仮定すればよいことが分かる。

ドーマー条件の動学式の（B. 1）式より，第 2. 2 節で場合分けしたものと同じ結果になることが分かる。つまり，θ の符号に関係なく $\gamma > r$ であれば，z_t は定常状態に安定的に収束するため財政の持続可能性が保証される。そして，$\gamma < r$ であったとしても，$\theta < 0$ かつ $z_0 < z^*$ であれば政府は債務を完済することが可能である。

参考文献

［1］ Barro, R. J.（1990）. Government spending in a simple model of endogenous growth. Journal of Political Economy, Vol. 98, pp. 103-125.

［2］ Domar, E. D.（1944） The “burden of the debt” and national income. American Economic Review, Vol. 34, pp. 798-827.

［3］ OECD（2022） Economic Outlook No 111 - June 2022

［4］ Romer, P.（1986）. Increasing returns and long-run growth. Journal of Political Economy, Vol. 94, pp. 1002-1037.

［5］ Solow, R. M.（1956） A contribution to the theory of economic growth. Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, pp. 65-94.

［6］ 財務省（2020）「日本の財政関係資料」2020 年 7 月付 https://www.mof.go.jp/policy/budget/fiscal_condition/related_data/202007.html

［7］ 内閣府「経済財政運営と構造改革に関する基本方針 2002」https://warp.da.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/11670228/www5.cao.go.jp/keizai-shimon/cabinet/2002/decision0625.html

［8］ 内閣府「経済財政運営と構造改革に関する基本方針 2006」https://warp.da.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/11670228/www5.cao.go.jp/keizai-shimon/cabinet/2006/decision0707.html

［9］ 畑農鋭矢ブログ「ドーマー条件～ 3 つの謎」2011 年 6 月 6 日付 http://web.archive.org/web/20130101122437/http://hatano1113.blogzine.jp/blog/2011/06/