松 山 大 学 論 集
第 34 巻 第 1 号 抜 刷
２０２２ 年 ４ 月 発 行

柔軟性のあるコールオプション

井　上　修　一

研究ノート

柔軟性のあるコールオプション

井　上　修　一

ヨーロピアン・コールオプションとは，原資産をあらかじめ決められた日に，決められた価格で買う権利のことである。通常，満期において原資産価格が行使価格を下回るとコールオプションの価値はゼロである。もしこのようなとき，行使価格を引き下げてもらえるならば，コールの保有者にとっては有利な話となろう。また，満期においてコールオプションに価値がないと分かったとき，満期を引き延ばしてもらえるならば，これもコールの保有者には都合がよい。次は，行使価格を上回るかもしれないからである。通常のコールオプションに，行使価格の変更，あるいは満期の延長といった柔軟性がついている場合のコールの価値はどのように表せるだろうか。

1　柔軟性のあるコールオプション；2 項モデルによる評価

まず，２項モデルにより柔軟性のあるコールオプションを評価する。まず，柔軟性のないコールオプション C_0 の評価から始める。$t=0$ における株価は S_0 で，$t=1$ では $S_1^+(=uS_0)$ に上昇するか，$S_1^-(=dS_0)$ に下落するものとする。さらに $t=2$ では $S_2^{++}(=uuS_0)$，$S_2^{+-}(=udS_0)$，$S_2^{--}(=ddS_0)$ に上昇あるいは下落するものとする。コールオプションの行使価格は X とする。$t=1$ におけるオプションの価値 C_1^+ と C_1^- を，

$$C_1^+ = \max[uS_0 - X, 0] = uS_0 - X$$
$$C_1^- = \max[dS_0 - X, 0] = 0$$

とする。このペイオフを m 単位の株式と借入 B により複製すると，

$$mS_1^+ + (1+r)B = C_1^+$$
$$mS_1^- + (1+r)B = C_1^-$$

で，これを解くと，

$$m = (C_1^+ - C_1^-)/(S_1^+ - S_1^-)$$
$$B = (1+r)^{-1} \cdot (C_1^- S_1^+ - C_1^+ S_1^-)/(S_1^+ - S_1^-)$$

となる。したがってコールオプションの $t=0$ における価値は

$$C_0 = mS_0 + B$$

となる。リスク中立確率 q を用いると，

$$C_0 = [qC_1^+ + (1-q)C_1^-]/(1+r) \quad q = [(1+r) - d]/(u-d)$$

と表される。

1）行使価格の引き下げ

ここで株価が下落したとき $C_1^- = \max[dS_0 - X_1, 0] = 0$ となるが，そうなったときには行使価格を引き下げることが可能であるとする。すなわち引き下げる前の行使価格を X_1，引き下げた後を X_2 とすると，

$$C_1^+ = \max[uS_0 - X_1, 0] = uS_0 - X_1$$
$$C_1^- = \max[dS_0 - X_2, 0] = dS_0 - X_2$$

となる。このときコールオプションの $t=0$ における価値は，

$$C_0 = [q \max[uS_0 - X_1, 0] + (1-q) \max[dS_0 - X_2, 0]]/(1+r)$$

と表せる。これが行使価格を引き下げる柔軟性があるときのオプション価値になると考えられる。

2）満期の延長

次に，株価が下落したとき満期の延長が可能であるとする。これは，株価の下落と同時に満期の異なる同じ行使価格のオプションを手に入れることに等しい。このとき $t=1$ におけるオプションの価値 C_1^+ と C_1^- は，

$$C_2^+ = \max[udS_0 - X, 0] = udS_0 - X$$
$$C_2^- = \max[ddS_0 - X, 0] = 0$$

になるものとすると，

$$C_1^+ = \max[uS_0 - X, 0] = uS_0 - X$$
$$C_1^- = \max[dS_0 - X, 0] + C_1' = C_1'$$

ただし，

$$C_1' = [qC_2^+ + (1-q) C_2^-]/(1+r)$$

である。したがって $t=0$ における価値は，

$$C_0 = [q \max[uS_0 - X, 0] + (1-q)\{\max[dS_0 - X, 0] + C_1'\}]/(1+r)$$

となり，これが満期を延長できる柔軟性があるときのオプション価値になると考えられる。

2　ブラックショールズモデルによる評価

1）行使価格を引き下げてもらう

ここでは M. Rubinstein（1976）と同様にオプションの価値は将来のキャッシュフローの期待値に等しいことを利用し評価する。株価の動きは以下のようにあらわされるとする。r はリスクフリーレート，σ はボラティリティである。ただし z は標準正規分布にしたがう変数である。

$$S_T = S_t \exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-tz}\right]$$

満期において原資産価格が当初に約束された行使価格 X_1 を下回るとき，新たに X_2 が適用されるようなコールオプションの価値は以下の式で求められると考える。

$$C_t = e^{-r(T-t)}\int_{z_1^*}^{\infty}\left(S_t \exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-tz}\right]-X_1\right)f(z)\,dz$$

$$+e^{-r(T-t)}\int_{z_2^*}^{z_1^*}\left(S_t \exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-tz}\right]-X_2\right)f(z)\,dz$$

$$z_1^* = \frac{ln\left(\frac{X_1}{S_t}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$z_2^* = \frac{ln\left(\frac{X_2}{S_t}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

右辺の第一項は，満期における原資産価格が行使価格 X_1 を上回るときの利得の現在価値であり，行使価格 X_1 のコールオプションの価値に等しい。第二項は，満期における原資産価格が X_1 から X_2 のあいだにあるときの利得の現在価値であり，これが行使価格を引き下げてもらう柔軟性の価値を表している。これより，

(1)式

$$C_t = \{S_t N(d_1^A) - X_1 e^{-(T-t)} N(d_2^A)\} + \{S_t N(d_1^B) - X_2 e^{-(T-t)} N(d_2^B)\}$$
$$- \{S_t N(d_1^A) - X_2 e^{-(T-t)} N(d_2^A)\}$$

$$d_1^A = \frac{ln\left(\frac{S_t}{X_1}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2^A = d_1^A - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$d_1^B = \frac{ln\left(\frac{S_t}{X_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2^B = d_1^B - \sigma\sqrt{T-t}$$

数値例

上	①		②		③		
S	100		100		100		
X	99		97		97		
r	0.01		0.01		0.01		
σ	0.1		0.1		0.1		
T	1		1		1		
t	0.9		0.9		0.9		
$dA1$	0.365254	$dB1$	1.010639	$dA1$	0.365254		
$dA2$	0.333631	$dB2$	0.979016	$dA2$	0.333631		
行使価格 99 の C		行使価格 97 の C					柔軟性のあるコールの価値
$C1$	1.879878	$C2$	3.35885	$C3$	3.13996		**2.098769**
							($C1+C2-C3$)

下

2.115372	1.819137	2.032894	2.241213	2.311817	2.216157	2.2875434	ランダム変数にもとづき
1.9653	2.148206	1.955012	1.948035	2.16734	1.859543	2.2665655	計算した柔軟性のある
1.905606	2.09613	2.277443	1.899789	2.239154	2.054556	2.1505191	コールの価値
2.192342	1.786886	1.95976	2.256914	2.118348	2.180407	2.0418318	
2.142846	2.332375	2.570767	1.8831	1.83941	2.072087	2.2328283	
2.153961	2.122025	2.173277	2.141833	2.115372			
					average =	2.1068425	

上側は(1)式より計算した柔軟性のあるコールの価値である。①は(1)式の第１項を，②は第２項，③は第３項を示している。これがブラックショールズモデルによるコールオプションの価値となる。その下側はランダム変数にもとづいて計算した柔軟性のあるコールの平均価値である。ランダム変数に基づいたコールの価値にはばらつきがあるが(1)式のよい近似となっている。

２）満期をのばしてもらう

満期 T において原資産価格が行使価格を下回るとき，通常ならコールオプションに価値はないが，新たに同じ行使価格で満期 T' のコールオプションが与えられると考える。

$$C_t = e^{-r(T-t)}\int_{z^*}^{\infty}\left(S_t \exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z\right]-X\right)f(z)\,dz$$

$$+e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{z^*}\left(S_t \exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z\right]N(d_1)\right.$$

$$\left.-Xe^{-r(T'-T)}N(d_2)\right)f(z)\,dz$$

$$z^* = \frac{ln\left(\dfrac{X}{S_t}\right)-\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\dfrac{S_t \exp\left\{\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z\right\}}{X}\right)+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T'-T)}{\sigma\sqrt{T'-T}}$$

$$d_2 = d_1-\sigma\sqrt{T'-T}$$

右辺第一項は，満期が T で行使価格 X の通常のコールオプションである。第二項は同じ行使価格 X で満期が $T'(>T)$ のコールオプションであり，これが満期を延長してもらう柔軟性の価値である。これより，

(2)式

$$C_t = S_t N(d_1^*) - Xe^{-(T-t)} N(d_2^*)$$
$$+ e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{z^*} (S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-tz}\right] N(d_1)$$
$$- Xe^{-r(T'-T)} N(d_2)) f(z) dz$$
$$d_1^* = \frac{ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2^* = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

数値例

S	100		
K	99		
r	0.01		
σ	0.1		
T	1	T'	1.5
t	0.5		
$d1*$	0.2481992		
$d2*$	0.1774886		
C	3.6093193		

上　0.590838　満期を待ってもらえる柔軟性の価値

通常のC	3.6794247	3.6484079	3.41985	3.3783794	3.7429804	3.4513294
満期延長のC	4.2574419	4.207883	3.8520911	3.9738296	4.3348638	3.9752612
柔軟性の価値	0.5780171	0.5594751	0.4322412	0.5954502	0.5918834	0.5239318
通常のC	3.9576268	2.9586677	3.6699132	3.5857421	3.885373	3.8858082
満期延長のC	4.5334945	3.6846919	4.2619316	4.1892629	4.3839925	4.5614509
柔軟性の価値	0.5758677	0.7260242	0.5920184	0.6035208	0.4986195	0.6756427
通常のC	3.8873642	3.6480978	3.3817331	4.236035	3.3579143	3.7411729
満期延長のC	4.3661819	4.2647812	3.9805407	4.7765785	3.8628183	4.3713364
柔軟性の価値	0.4788177	0.6166834	0.5988076	0.5405435	0.504904	0.6301635
通常のC	3.5538271	3.3634233	3.8929359	4.0497793	3.5761764	4.5633297
満期延長のC	4.1799015	3.9274438	4.4786823	4.5920292	4.0719126	5.0839851
柔軟性の価値	0.6260745	0.5640205	0.5857464	0.5422499	0.4957362	0.5206554

	Average	通常のC	3.6881372
		満期延長のC	4.2571828
下		柔軟性の価値	0.5690456

上側は⑵式より計算した通常のコールオプションの価値と満期をのばしてもらえる柔軟性の価値である。下側はランダム変数にもとづいて計算した通常のコールオプションと満期を延長してもらえるコールオプションの価値である。柔軟性の価値はこれら 2 つのコールオプションの差となる。ランダム変数に基づいた柔軟性の価値にはばらつきがあるが平均すると⑵式のよい近似となっている。

3）行使価格の見直しや満期の延長について

満期の延長や契約内容の変更は実際にある。

> 「融資債権だけでなく社債もデフォルト（債務不履行）とみなすことを検討する」との見解を示した。融資*返済期限の延長や金利減免*が実施された場合も「発行体の債務償還能力に支障がある」として，安全性の低い「Caa」へ下げる方針だ。　（日本経済新聞 2011 年 5 月 20 日）

> 無秩序なデフォルトは関係者が十分に準備できていないため，損失回避の動きが出て市場が混乱しやすい。（中略）。*債権者と協議し金利減免や返済猶予*などで合意した場合は「秩序だったデフォルト」と呼ばれ，混乱は限られる例が多い。　（日本経済新聞 2012 年 2 月 22 日）

このコールオプションの評価式により，行使価格の減免や満期の延長といった柔軟性の価値を評価できるようになった。

例　MS ワラント

> 中小型の上場企業が株式市場において資金調達を行う際の方法として，*行使価額修正条項付き新株予約権*，いわゆる MS ワラント（Moving Strike Warrant）の第三者割当による発行が広がっているようだ。（中略）。MS ワ

ラント発行の発表後，当該企業の株価が大きく変動することがあるため，投資家から注目されている。

新株予約権（ワラント）とは，期間内に新株予約権の保有者（＝投資家・割当先）が発行企業（＝資金調達企業）に対して一定の行使価額に基づく対価を支払って発行企業から株式を取得するための権利である。MS ワラントの場合は新株予約権の行使価額が変動する。

（大和総研「活用広がる MS ワラントでの資金調達」）

応用①；ダブルコールオプション

ダブルコールオプションとは，原資産にたいして２回権利行使が可能なオプションであるとする。まず，満期 T，行使価格 X_1 のコールオプションを保有しているとする。満期 T において権利行使されると，もう一度，同じ原資産に対する満期 T'，行使価格 X_2 のコールオプションを保有することになるというのが，ダブルコールオプションである。このようなダブルコールオプションはコンパウンドオプションに似ていて，前節の結果を応用して評価できる。

$$C_t = S_t N(d_1^*) - X_1 e^{-(T-t)} N(d_2^*)$$

$$+ e^{-r(T-t)} \int_{z^*}^{\infty} \left(S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-tz} \right] N(d_1) \right.$$

$$\left. - X_2 e^{-r(T'-T)} N(d_2) \right) f(z)\, dz$$

$$z^* = \frac{ln\left(\frac{X_1}{S_t}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t \exp\left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-tz} \right\}}{X_2} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)(T'-T)}{\sigma\sqrt{T'-T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T'-T}$$

$$d_1^* = \frac{ln\left(\frac{S_t}{X_1}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2^* = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

例　満期特約付き定期預金

金融技術を集めた先物などデリバティブ（金融派生商品）はプロが取引する商品。その仕組みを取り入れた預金を一部の銀行で購入できる。代表例が「満期特約付き定期預金」だ。預け入れる満期（預入期間）を銀行が決める代わり，預金金利は高めだ。(中略)。商品性を見てみよう。満期は 5 年で金利は年 1.4%。ところが銀行の判断で 10 年に満期が伸びることがある。その場合，6 年目以降の金利は年 1.5%に上がる。同行の通常の円定期預金の金利（年 0.75%）の 2 倍だ。5 年後の市場金利が上昇局面なら，満期延長の可能性が高い。銀行にとって預金金利は資金調達時のコスト。市場金利が 6 年目以降に 1.5%超に上がっていれば，銀行は預かったお金を市場で運用して利益を得られるため，満期を延長して預金をつなぎ留める。逆に金利が低下していれば，満期は当初予定の 5 年で終わる公算が大きい。　　　　　　　　　　（日本経済新聞 2007 年 5 月 15 日）

金利が比較的高い代わりに,銀行が満期を決める権利をもつ円定期預金(満期特約付き定期）が人気だ。預入期間は最長 10 年に及ぶ上，中途解約は原則できない。(中略)。最大の特徴は，預金者の了解がなくても銀行が一方的に満期を延長したり繰り上げたりできることだ。当初は短い預入期間でも事後的に長期に延ばされる「満期延長型」と，最初は長期でも事後的に短くされる「満期繰り上げ型」の 2 タイプがあるが，実質的に商品設計は同じだ。一般的には，将来金利水準が上がれば，銀行としては契約時に

定めた金利のまま継続してもらったほうが得なので預入期間を長くする。金利が下がれば，その時点でより低い金利を設定しなおせるので短期間にする。預入期間の後半ほど高金利となる「ステップアップ型」を扱う銀行もあるが，金利情勢によっては満期が繰り上がり，後半の高金利を享受できない可能性もある。　（日本経済新聞 2011 年 3 月 28 日）

銀行が預金者に支払う約束された金利を 1.4％とする。もし市場金利が 1.4％を上回る 2 ％となれば，銀行は 1.4％の支払いを継続させるであろう。一方，市場金利が 1.4％を下回り 1 ％となれば，銀行は 1.4％の支払いを解消させるであろう。つまり，原資産を市場金利，行使価格を 1.4％のコールオプションと捉えることができる。満期特約付き定期預金は，銀行がコールオプションを保有していることと同じと考えらえる。そして，銀行が取引を継続させることはダブルコールオプションにおける 1 回目の権利行使に等しい。

応用②；コールあるいはプットを選べる権利

現時点ではコールが有利なのか，プットが有利なのかはわからないが，原資産の推移を観察しながらコールかプットのどちらかを途中で選択できる権利があれば，投資家にとって都合の良い話となろう。

時点 t ではコールオプションにするか，プットオプションにするかわからないが，時点 $T(>t)$ において原資産価格が X を上回れば行使価格 X，満期 $T'(>T)$ のコールを，逆に，下回れば行使価格 X，満期 T' のプットを選択できるような権利の価値 Op は，以下の式で求められると考える。

$$
\begin{aligned}
Op_t = e^{-r(T-t)}\int_{z^*}^{\infty}&(S_t \exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-tz}\right]N(d_1)\\
&-Xe^{-r(T'-T)}N(d_2))f(z)dz\\
&+e^{-r(T-t)}\int_{\infty}^{z^*}(Xe^{-r(T'-T)}N(-d_2)\\
&-S_t \exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-tz}\right]N(-d_1))f(z)dz
\end{aligned}
$$

$$
z^* = \frac{ln\left(\frac{X}{S_t}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
$$

$$
d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
$$

$$
d_2 = d_1-\sigma\sqrt{T-t}
$$

ま と め

通常のコールオプションに，行使価格の変更，あるいは満期の延長といった柔軟性がついている場合のコールの価値について考察した。いずれも通常のコールオプションに柔軟性の価値を加えた形となっている。行使価格の変更や満期の延長の応用例も示した。柔軟性のあるコールオプションはこのほかにも考えられよう。これについては今後の課題としたい。

参 考 文 献

M. Rubinstein（1976）‘The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options’ Bell journal of Economics, 7(2), Autumn, 407-25