松 山 大 学 論 集
第 34 巻 第 1 号 抜 刷
2 0 2 2 年 4 月 発 行

算変法不変式がつくる座標系について

平 田 浩 一

算変法不変式がつくる座標系について

平　田　浩　一

1　は　じ　め　に

和算の図形問題では，多数の円が互いに接している図が与えられ，その中の特定の円の直径を求めよという問題が数多くある。次の図 1 は愛媛の和算家大西佐兵衛[1)]の和算書『雑題』第 4 巻の最初の問題の図である。

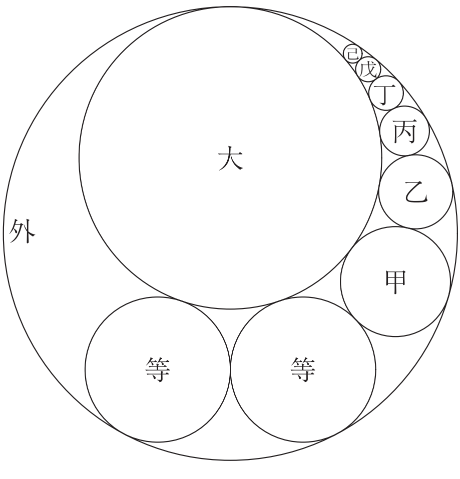

図 1　和算の問題

1）大西は 1803 年に松山市道後の伊佐爾波神社に算額を奉納している。その算額は全国のハイレベルな算額を収録した藤田嘉言著『続神壁算法』に掲載されたため全国的に知られることとなった。図 1 と同じ問題が『観新考算変』でも取り上げられている。

このような問題を解くために，法道寺善は外円と大円の直径を無限に大きくするという着想を思いつき，その方法が著書『観新考算変』に述べられている。それは現在の反転法や算変法の考え方の元となっている［6］。

反転法は，問題の図（元図）をどのように反転させたら問題が解きやすくなるかを考え反転円を決定し，正確な反転図を描く。その反転図の中で求めたい円径を決定し, 反転公式を利用して元図の中の円径を求めるという手法である。

もう一つの算変法は反転で値が変わらない不変式を用いるのがその特徴である。求めたい円径を計算するために元図の中で方程式をいくつか立式する。不足する情報を反転図の中で不変式の値として求め，それを元図に持ち込み連立方程式を完成させる。あとは連立方程式を解くことで円径が求まる。多くの作業を元図の中で行い，ピンポイントで反転図を利用する。正確な反転図を描く必要はなく，不変式の値が計算できる程度のアバウトな反転図が描ければ十分である。

この論文では，算変法のアイデアをさらに発展させ，円を決定する座標系として算変座標を導入する。さらに，その座標に魂を吹き込む 2 つの公式，半径公式と距離公式を導く。この算変座標，半径公式，距離公式を駆使することで反転図を描くことなく，かつ反転法や算変法に匹敵する問題解法の手法を確立することがこの論文の目的である。

2　反　　転

3 次元ユークリッド空間を E^3 とし，その単位球面を

$$S^2=\{(x,\ y,\ z)\in E^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

とし，座標が（0, 0, 1）である点（北極）を N とする（図 2）。また，方程式 $z=0$ による平面を E^2 とする。

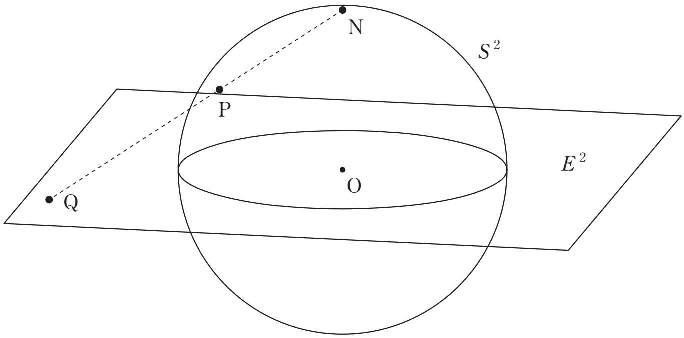

図２　ステレオ投影

$$E^2 = \{(x,\ y,\ z) \in E^3 \mid z = 0\}$$

球面 S^2 上の点 N とは異なる任意の点を P とし，直線 NP と平面 E^2 との交点を Q とする。点 P と点 Q との対応 $\pi : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{Q}$ はステレオ投影（stereographic projection）といい，球面 S^2 から点 N を除いた集合 $S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ と E^2 の間の対応

$$\pi : S^2 \setminus \{\mathrm{N}\} \longrightarrow E^2$$

は１対１対応である。これに加えて，写像 π による点 N の行き先を無限遠点であるとみなして

$$\pi : S^2 \longrightarrow E^2 \cup \{\infty\}$$

のような１対１対応があると拡張解釈することができる。記述の簡略化のために $E^2 \cup \{\infty\}$ を E^2_∞ と表すことにすれば，全単射 $\pi : S^2 \to E^2_\infty$ となる。

このステレオ投影 π により，S^2 上の点 N を通らない円（大円または小円）は E^2 上の円に移り，S^2 上の点 N を通る円は E^2 上の直線に移る。また逆写

像 π^{-1} により，E^2 上の円は S^2 上の点 N を通らない円に移り，E^2 上の直線は S^2 上の点 N を通る円に移る。

通常我々は平面 E^2 上の円と直線は性質の異なるまったくの別物として認識しているが，ステレオ投影写像 π を通して S^2 上の図形として見ることにより，円と直線は実は同類であったことに気づかされる。つぎに定義する反転も円と直線を同類として扱うと都合がよいものである。

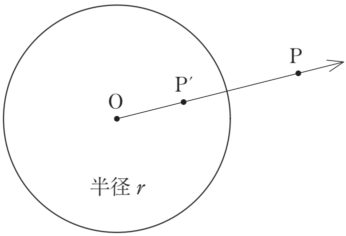

図 3　反転の定義

定義 1　図 3 のように，点 O を中心とする半径 r の円が与えられている。平面上の点 O 以外の任意の点 P に対し関係式 $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}'=r^2$ をみたす半直線 OP 上の点 P′ を対応させる写像 $\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}'$ を**反転**という。このとき，円 O を**反転円**，点 O を**反転中心**，r を**反転半径**という。

このように定義される反転は次のような性質を持つことが知られている[6]。

補題 1　反転による直線と円の像は次のようになる。

(i)　反転中心を通る直線はその直線自身に移る。

(ii)　反転中心を通らない直線は反転中心を通る円に移る。

(iii)　反転中心を通る円は反転中心を通らない直線に移る。

(iv)　反転中心を通らない円は反転中心を通らない円に移る。

この補題は，反転を考えるときは，円と直線は同類として扱うことが望ましいことを意味している。また，定義 1 での反転の定義では，反転中心 O の反転像が未定義である。そのため，反転は E^2 での変換として考えるのではなく，E^2_∞ での変換として考え，次のように定義するとすっきりする。

定義 2　円 c に対し，反転写像 $\nu_c : E^2_\infty \to E^2_\infty$ を次のように定義する。反転円 c の中心 O 以外の E^2 上の点 P に対しては，定義 1 と同様に $\nu_c(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$ とする。さらに $\nu_c(\mathrm{O}) = \infty$，$\nu_c(\infty) = \mathrm{O}$ とする。また，直線 l に対する反転 ν_l を E^2 上の点に対しては l に関する鏡映とし，さらに $\nu_l(\infty) = \infty$ とする。

このように定義するとき，反転写像 ν_c と ν_l はともに全単射 $E^2_\infty \to E^2_\infty$ となる。円と直線を同類として扱うことが望ましいので，E^2_∞ 上の円を次のように定義する。

定義 3　次の(i)および(ii)を E^2_∞ **上の円**という。

(i)　E^2 上の円 c

(ii)　E^2 上の直線 l に無限遠点を加えた $l \cup \{\infty\}$

このように円と直線を一括りにした E^2_∞ 上の円を定義することで，補題 1 は整理されて次の補題 2 のようにすっきりした表現となる。

補題 2　E^2_∞ 上の円 c による反転 $\nu_c : E^2_\infty \to E^2_\infty$ で，E^2_∞ 上の円は E^2_∞ 上の円に移る。

そこで，E^2_∞ 上の円全体のなす集合を $C(E^2_\infty)$ と表すことにすると，円 $c \in C(E^2_\infty)$ による反転 ν_c は全単射

$$\nu_c : C(E_\infty^2) \longrightarrow C(E_\infty^2)$$

とみなすことができる。

3　算変法の不変式

ここでは，［6］で紹介している法道寺善著『観新考算変』の不変式について取り上げる。

E^2 の 2 円 c_1，c_2 があるとき，それぞれの半径を r_1，r_2 とし，中心間の距離を d とする。このとき 2 円 c_1，c_2 に対して決まる値 $s(c_1,\ c_2)$ を

$$s(c_1,\ c_2) = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$$

と定める。この値が反転により不変であることを利用して図形の問題を解こうという考え方が算変法である。

反転により円は直線に移る場合もあるので，円と直線の場合の s，直線と直線の場合の s ももちろん定義して不変性を証明しなければならないのであるが，実は［4］で述べているようにこのままでは反転不変ではない。

図 4 のように，円 c_1 を原点を中心とする半径 1 の円，円 c_2 を（3，0）を中心とする半径 1 の円とする。このとき $s(c_1,\ c_2) = 3.5$ である。この 2 円を c_1 で反転させるとそれぞれ c_1，c_3 に移る。このとき $s(c_1,\ c_3) = -3.5$ となってしま

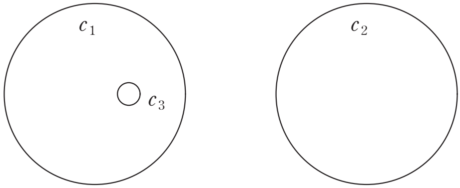

図 4　反転不変でない例

い，上のような定義では s は反転不変とはならないのである。

そこで論文［5］では，どのような注意を払えば s を不変式と同様に取り扱うことができるかについて議論し，反転中心の位置に制限を加えることで s の不変性が示せることを明らかにした。

コクセターの論文［2］では，絶対値をとって

$$s(c_1,\ c_2)=\left|\frac{d^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}\right| \tag{1}$$

と定義することで不変式になることを示し，この s を inversive distance（反転距離）と呼んでいる。コクセターの論文では主に２円 c_1，c_2 が共有点を持たないときの s について考察しているが，２円が交点を持つときにはそのなす角度を θ とすることで $s=|\cos\theta|$ となる。このことには，余弦定理

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

の式と式(1)の類似性が関わっている。

式(1)のように絶対値をとることにより s の反転不変性は保証されるが，さまざまな公式を作ろうとするときには絶対値を含む式は場合分けなどの処理が必要であり厄介である。また絶対値をつけたことにより，２円の外接と内接の判別ができなくなるなど，失われた情報もある。そのため絶対値をつけずに不変式が定義できたらよりよい不変式が得られるだろうと予想はするのだが，それを明瞭に定義することはなかなか難しい。そのようなときに見つけたのが Bowers-Hurdal の論文［1］である。そこでは，円に向きをつけた有向円に対して不変式 s を次のように定義している。

円によって平面は２つの領域に分けられるが，円に向きが付いていると進行方向に対して左側領域と右側領域を区別することができる。図５では左側領域を灰色で示している。そこで，次のように反転距離を定義する。

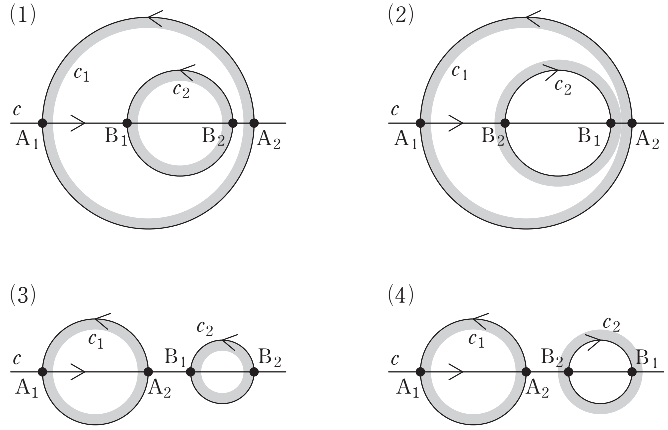

図 5　有向円での 4 点の取り方

定義 4　E^2_∞ 上の 2 つの有向円 c_1, c_2 が与えられている。その 2 円と直交する有向円を c とする。図 5 では c を直線として表した。c と c_1 の交点を A_1, A_2, c と c_2 の交点を B_1, B_2 とする。このとき不変量 $s(c_1, c_2)$ を次のように定義する。

$$s(c_1,\ c_2) = -\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \tag{2}$$

$$\lambda = [A_1,\ A_2;\ B_1,\ B_2] \tag{3}$$

ただし，4 点 A_1, A_2, B_1, B_2 の選び方は，有向円 c の向きに沿って進むとき，c_1 の左側領域に A_1 で入り，c_1 の左側領域から A_2 で出るように，A_1, A_2 を選択する。B_1, B_2 についても同様である[2]。また，式(3)の右辺の記号は複比で，4 点 A_1, A_2, B_1, B_2 が x 軸上にありその x 座標を a_1, a_2, b_1, b_2 とするとき複比は

2）有向円 c の向きの選び方により，4 点 A_1, A_2, B_1, B_2 の選び方が変わるが，複比 λ は同じ値である。

$$[\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2;\ \mathrm{B}_1,\ \mathrm{B}_2]=\frac{(a_1-b_1)(a_2-b_2)}{(a_1-b_2)(a_2-b_1)} \tag{4}$$

と定義される[3]。

この定義により2円の向き・位置と不変式 $s=s(c_1,\ c_2)$ の値の関係は次の図6のようになる。

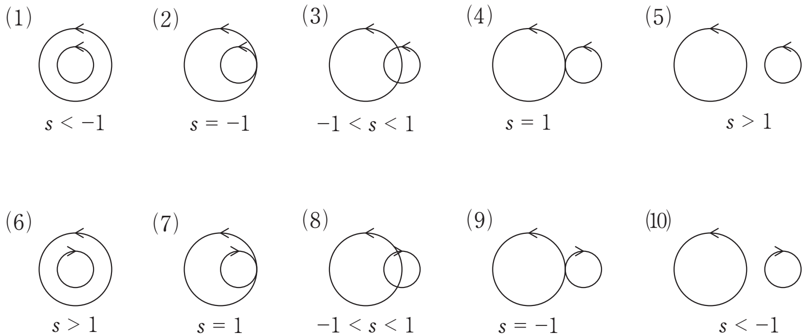

図6　2円の位置と s の値

このように複比を用いて s を定義したので，複比が反転不変であることから，s もまた反転不変であることは明らかである。

E^2_∞ 上の有向円全体のなす集合を $O(E^2_\infty)$ と表すことにする。このとき，算変法の不変式（反転距離）は写像

$$s: O(E^2_\infty)\times O(E^2_\infty)\longrightarrow \boldsymbol{R}$$

として定義されたことになる。

3）円周上の4点に対する複比の定義は，4点の位置を複素数で表し同じ式(4)を用いて定義する。円周角の定理によりその値は常に実数となる。

反転距離という呼び方は s によって集合 $O(E^2_\infty)$ が距離空間となったかのような誤解を与えるかもしれない。しかし，不変式 s は距離空間がみたすべき性質，

$$s(c_1,\ c_2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1=c_2$$

をみたさないので，距離空間とはならない。どちらかというと

$$s(c_1,\ c_2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 \perp c_2$$

が成り立つのでベクトルの内積に近い性質を持っている。そのため反転積（inversive product）と呼ばれることもある。

算変法の不変式の性質について簡単にまとめる。有向円 c の向きを逆にした有向円を $-c$ と表すことにする。

補題 3　算変法の不変式は次の性質をもつ。

(i)　$s(c_1,\ c_2)=s(c_2,\ c_1)$

(ii)　$s(-c_1,\ c_2)=s(c_1,\ -c_2)=-s(c_1,\ c_2)$

(iii)　反転 ν_c に対し $s(\nu_c(c_1),\ \nu_c(c_2))=s(c_1,\ c_2)$

(iv)　2 円 c_1, c_2 が直交するとき $s(c_1,\ c_2)=0$

補題 4　直交する 2 つの有向円 c, c' に対し $\nu_c(c')=-c'$ が成り立つ。

定義 4 での定義方法では具体的な s の値の計算には向いていない。そこで，有向円の**符号つき半径** r を，有向円が反時計回りならば $r>0$，時計回りならば $r<0$ と定義し，次の補題 5 により s を計算するのが便利である。

補題５　算変法の不変式 s について次の(ⅰ)〜(ⅲ)が成り立つ。

(ⅰ)　E^2 上の２つの有向円 c_1，c_2 の場合は，２円の符号付き半径をそれぞれ r_1，r_2 とし，中心間の距離を d とするとき，次の式が成り立つ。

$$s(c_1,\ c_2)=\frac{d^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}$$

(ⅱ)　E^2 上の有向直線 l_1 と有向円 c_2 の場合は，有向直線 l_1 から円 c_2 の中心 O までの**符号つき距離** h を，O が l_1 の左側領域にあれば $h<0$，右側領域にあれば $h>0$ とし，円 c_2 の符号付き半径を r とするとき，次の式が成り立つ。

$$s(l_1,\ c_2)=\frac{h}{r}$$

(ⅲ)　E^2 上の２つの有向直線 l_1 と l_2 の場合は，そのなす角を θ とするとき，次の式が成り立つ。

$$s(l_1,\ l_2)=-\cos\theta$$

（証明）　最初に，式(2)，(3)，(4)を合成すると

$$s(c_1,\ c_2)=2\frac{(a_1-b_1)(a_2-b_2)}{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}-1$$

となることを指摘する。

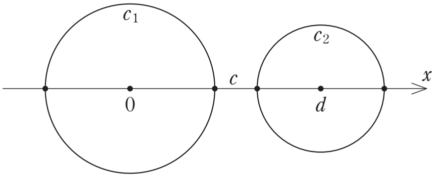

図7　補題5(i)の証明

(i)　必要ならば反転することで，円 c_1 の中心を原点，円 c_2 の中心を点 $(d,\ 0)$ $(d \geqq 0)$ と仮定する（図7）。また，これら2円に直交する円 c として x 軸をとり，向きは右向きと仮定する。円 c_1 の符号つき半径を r_1 とする。2点 $\mathrm{A}_1(a_1,\ 0)$, $\mathrm{A}_2(a_2,\ 0)$ は，$r_1>0$ のとき $a_1<a_2$ で，$r_1<0$ のとき $a_1>a_2$ となるように選ぶ必要がある。そのためには $a_1=-r_1$, $a_2=r_1$ とすればよい。円 c_2 の符号つき半径を r_2 とするとき，2点 $\mathrm{B}_1(b_1,\ 0)$, $\mathrm{B}_2(b_2,\ 0)$ についても同様にして $b_1=d-r_2$, $b_2=d+r_2$ とすればよい。従って

$$
\begin{aligned}
s(c_1,\ c_2) &= 2\frac{(-r_1-d+r_2)(r_1-d-r_2)}{(-r_1-r_1)(d-r_2-d-r_2)}-1 \\
&= \frac{d^2-r_1^2-r_2^2+2r_1r_2}{2r_1r_2}-1 \\
&= \frac{d^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}
\end{aligned}
$$

となる。

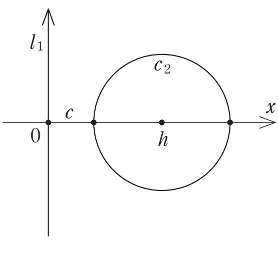

図8　補題5(ii)の証明

(ii)　必要ならば反転することで，直線 l_1 を y 軸とし，向きは上向きと仮定する（図８）。また，円 c_2 の中心 O は x 軸上にあるものと仮定する。直線 l_1 と円 c_2 に直交する円 c として x 軸をとり，向きは右向きとする。直線 l_1 から円 c_2 の中心 O までの符号つき距離を h とすると，O の座標は $(h,\ 0)$ となる。２点 $A_1(a_1,\ 0)$，$A_2(a_2,\ 0)$ は $a_1=\infty$，$a_2=0$ である。円 c_2 の符号つき半径を r とするとき，２点 $B_1(b_1,\ 0)$，$B_2(b_2,\ 0)$ は $b_1=h-r$，$b_2=h+r$ となる。

ここで，４点 A_1，A_2，B_1，B_2 の複比をとるのであるが，A_1 が無限遠点なので反転により位置を変えてから複比を計算する。円 c_2 でこれら４点を反転させることで，$A_1'(h,\ 0)$，$A_2'(h-\dfrac{r^2}{h},\ 0)$，$B_1'(h-r,\ 0)$，$B_2'(h+r,\ 0)$ となるので

$$s(l_1,\ c_2)=2\frac{(h-h+r)(h-\frac{r^2}{h}-h-r)}{(h-h+\frac{r^2}{h})(h-r-h-r)}-1$$
$$=2\frac{-(r^2+\frac{r^3}{h})}{-\frac{2r^3}{h}}-1=\frac{h+r}{r}-1=\frac{h}{r}$$

を得る。

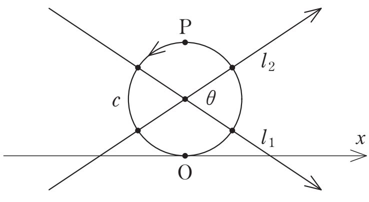

図９　補題５(iii)の証明

(iii)　$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおき，直線 l_1 を $y=-tx+1$，直線 l_2 を $y=tx+1$ とし，直線の向きは図９のように x 軸の正の方に向いているものとする。２直線 l_1，l_2 に直交する円 c を点（0，1）を中心とする半径１の円で，向きは反時計回りとする。

このときの4点は，$s=\sin\dfrac{\theta}{2}$，$c=\cos\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，

$$\mathrm{A}_1(c,\ 1-s),\ \mathrm{A}_2(-c,\ 1+s),\ \mathrm{B}_1(c,\ 1+s),\ \mathrm{B}_2(-c,\ 1-s)$$

となる。この4点は円周上にあるので，複素数を用いて複比を計算してもよいのだが，ここでは反転により一直線上に変換してから複比を計算することにする。点P（0, 2）を中心とする半径2の円で反転させ

$$\mathrm{A}_1'\left(\frac{2c}{1+s},\ 0\right),\ \mathrm{A}_2'\left(\frac{-2c}{1-s},\ 0\right),\ \mathrm{B}_1'\left(\frac{2c}{1-s},\ 0\right),\ \mathrm{B}_2'\left(\frac{-2c}{1+s},\ 0\right)$$

に移し，これにより不変式を計算すると

$$\begin{aligned}
s(l_1,\ l_2)&=2\frac{\left(\dfrac{2c}{1+s}-\dfrac{2c}{1-s}\right)\left(\dfrac{-2c}{1-s}-\dfrac{-2c}{1+s}\right)}{\left(\dfrac{2c}{1+s}-\dfrac{-2c}{1-s}\right)\left(\dfrac{2c}{1-s}-\dfrac{-2c}{1+s}\right)}-1\\
&=2\frac{4c^2s^2}{4c^2}-1=2c^2-1\\
&=2\ \sin^2\frac{\theta}{2}-1=-\cos\ \theta
\end{aligned}$$

となる。 □

系1　2つの有向円 c_1，c_2 が2点で交わる場合はそのなす角を θ とするとき，

$$s(c_1,\ c_2)=-\cos\ \theta$$

である。

（証明）　その2円を反転により2直線に移す。反転で角度は不変なので，補題5(iii)を用いれば結果が得られる。 □

4　方べきと根軸・根心

ここでは方べき，根軸，根心について簡単におさらいを行う[4]。よく知られていることなので結果のみ簡単に示す。

定義5　中心がOで半径がrの円cと点Pに対し，方べき$h(c,\ \mathrm{P})$を

$$h(c,\ \mathrm{P})=\mathrm{PO}^2-r^2$$

と定義する。

補題6　方べき$h(c,\ \mathrm{P})$の符号は次のようになる。

(i)　Pが円cの内部にあるとき$h(c,\ \mathrm{P})<0$

(ii)　Pが円cの周上にあるとき$h(c,\ \mathrm{P})=0$

(iii)　Pが円cの外部にあるとき$h(c,\ \mathrm{P})>0$

補題7（方べきの定理）　点Pを通る直線をlとするとき次が成り立つ。

(i)　Pが円cの内部にありlが円cと2点A，Bで交わるとき$h(c,\ \mathrm{P})=-\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$

(ii)　Pが円cの外部にありlが円cと2点A，Bで交わるとき$h(c,\ \mathrm{P})=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$

(iii)　Pが円cの外部にありlが円cと点Tで接するとき$h(c,\ \mathrm{P})=\mathrm{PT}^2$

4）方べき，根軸，根心のいずれも反転不変な性質ではないので注意する必要がある。

定義 6　同心円ではない2円 c_1，c_2 に対して，次の式をみたす点Pの軌跡を2円 c_1，c_2 の**根軸**という。

$$h(c_1,\ \mathrm{P})=h(c_2,\ \mathrm{P})$$

補題 8　同心円ではない2円 c_1，c_2 の根軸について次が成りたつ。

(i)　根軸は2円の中心を通る直線に垂直な直線である。

(ii)　2円が2交点を持つとき根軸はその2交点を通る直線である。

(iii)　2円が接するとき根軸はその接点を通る2円の共通接線である。

補題 9　同心円ではない2円 c_1，c_2 の両方に直交する円の中心Pの軌跡は，c_1，c_2 の根軸のうちで2円の外部にある部分である。

補題 10　3円 c_1，c_2，c_3 の中心が三角形をなすとき，3組の根軸は1点で交わる。その交点を**根心**と呼ぶ。

3円 c_1，c_2，c_3 の根心をPとすると根軸の定義により $h(c_1,\ \mathrm{P})=h(c_2,\ \mathrm{P})=h(c_3,\ \mathrm{P})$ となる。

補題 11　3円 c_1，c_2，c_3 の中心が三角形をなすとき，根心の位置は次の(i)〜(iii)のいずれかである。

(i)　根心は3円の内部にある。

(ii)　根心は3円の周上にある。

(iii)　根心は3円の外部にある。

3つの方べきが正であれば，根心は3円の外部にあるので根心から3円に接線を引くとき接線はすべて同じ長さである。したがって，根心を中心として接線の長さを半径とする円 c は3円 c_1，c_2，c_3 すべてと直交する[5]。

補題 12　3円 c_1，c_2，c_3 の中心が三角形をなし，その根心をPとする。3円に直交する円がただ1つ存在するための必要十分条件は根心Pが3円の外部にあることである。

5　円　　　束

2円 c_1，c_2 の方程式をそれぞれ $f_1(x,\ y)=0$，$f_2(x,\ y)=0$ とするとき，パラメータ a，b を用いて表される方程式

$$af_1(x,\ y)+bf_2(x,\ y)=0 \tag{5}$$

は円となる。このようにして作られる円の集合を**円束**と呼ぶ。円束に対して c_1，c_2 を**生成円**と呼ぶ。2つのパラメータを用いているが実質は比 $a:b$ で円が定まるので1パラメータである。円束は次の3種類に分類される。

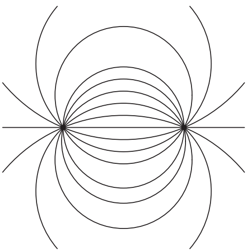

図 10　楕円型円束

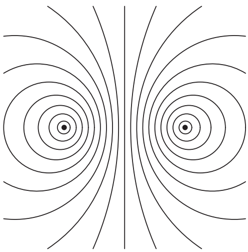

図 11　双曲型円束

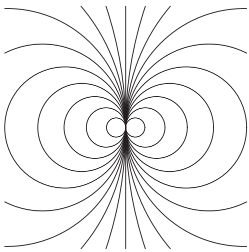

図 12　放物型円束

5）この「3円に直交する円」は反転不変な性質である。

（楕円型円束） 2定点A_1, A_2を通る円全体のなす集合である（図10)。楕円型円束に属する全ての円に直交する円は無数に存在し，それらの直交円全体は双曲型円束となる。

（双曲型円束） 2定点F_1, F_2と比$a:b$で定まるアポロニウスの円全体のなす集合である（図11)。その2定点を焦点と呼ぶ。双曲型円束に属する全ての円に直交する円は無数に存在し，それらの直交円全体は楕円型円束となる。

（放物型円束） 定直線lとその上の定点Pがあるとき，点Pにおいてlに接する円全体のなす集合である（図12)。放物型円束に属する全ての円に直交する円は無数に存在し，それらの直交円全体は放物型円束となる。

円束は反転不変な性質である。また，ある円束に直交する円束を，**共役円束**という。

E^2上の平面幾何においては，「3点が同一直線上にある」や「3点が同一直線上にない」という表現が図形の性質を語るときによく用いられる。これと同様なことがE^2_∞上の3円に対する，「3円が同一円束に属する」や「3円が同一円束に属さない」という表現である。集合$C(E^2_\infty)$における円束は，E^2における直線に対応するものである。

また，次の補題が成り立つことが知られている。

補題13 E^2_∞上の円cが2円c_1, c_2に直交するとき，cはc_1, c_2が生成する円束に属するすべての円に直交する。

補題14 E^2_∞上の3円c_1, c_2, c_3に直交する円が2つ存在すれば，3円c_1, c_2, c_3は同一円束に属す。

6 六　斜　術

算変法の不変式がつくる座標系を定義する前に，2定点A, Bからの距離がつくる座標系について考えてみることにする。

x 軸上の 2 定点を A, B とし，2 定点の距離を $e=d(\mathrm{A},\ \mathrm{B})$ とする。平面 E^2 上の任意の点 P に対して，P から 2 点 A, B までの距離をそれぞれ $\alpha=d(\mathrm{P},\mathrm{A})$, $\beta=d(\mathrm{P},\mathrm{B})$ とおき，点 P の座標を $[\alpha,\ \beta]$ と表すことを考えてみよう。

しかし，この座標系は曖昧である。同じ座標で表される点が図 13 のように 2 つ存在するときがある。そのような同一座標をもつ 2 点 P, P′ は常に x 軸に関して線対称である。さらに任意の $\alpha,\ \beta>0$ に対して座標 $[\alpha,\ \beta]$ を持つ点が存在するとは限らないことも問題である。

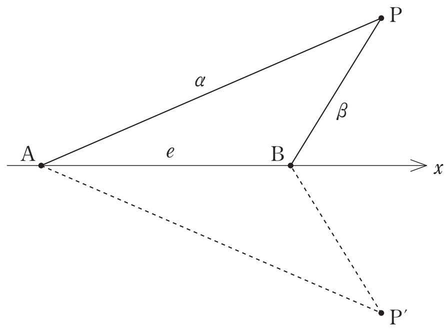

図 13　座標 $[\alpha,\ \beta]$

しかし，平面 E^2 を上半平面

$$E_+^2=\{(x,\ y)\in E^2 \mid y>0\}$$

に限定することにし，さらに座標に用いる $\alpha,\ \beta$ は

$$\alpha>0,\quad \beta>0,\quad |\alpha-\beta|<e<\alpha+\beta \tag{6}$$

をみたすとの条件をつけることにすれば，座標 $[\alpha,\ \beta]$ は上半平面 E_+^2 上のすべての点を一意に表すことができる。

このような座標を持つ点が2つ $P_1[\alpha_1, \beta_1]$，$P_2[\alpha_2, \beta_2]$ あるとき，この2点間の距離 $p=d(P_1, P_2)$ を計算する式とは何であろうか。すなわち，この座標系における距離の公式とはなんであろうか。それを説明する前に次の式 K を定義する。

定義7　6変数 a, b, c, x, y, z に対して式 $K(a, b, c; x, y, z)$ を

$$\begin{aligned}
&K(a, b, c; x, y, z)\\
&\quad = a^2x^2(-a^2+b^2+c^2-x^2+y^2+z^2)+b^2y^2(a^2-b^2+c^2+x^2-y^2+z^2)\\
&\quad +c^2z^2(a^2+b^2-c^2+x^2+y^2-z^2)-(a^2b^2z^2+b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+x^2y^2z^2)
\end{aligned}$$

と定める。

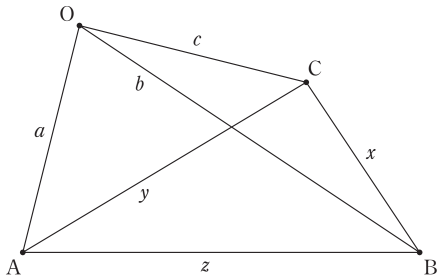

図14　六斜術

次の定理は和算でよく使われる公式である［3］。

定理1（六斜術）　平面上の異なる4点をO, A, B, Cとし，その距離を $a=d(O, A)$, $b=d(O, B)$, $c=d(O, C)$, $x=d(B, C)$, $y=d(C, A)$, $z=d(A, B)$ とするとき

$$K(a,\ b,\ c;\ x,\ y,\ z)=0$$

が成り立つ（図 14)。

この六斜術を用いると，2 点 $P_1[\alpha_1,\ \beta_1]$, $P_2[\alpha_2,\ \beta_2]$ の間の距離 $p=d(P_1,\ P_2)$ を求める公式は式 K を用いて次のように表すことができる。

定理 2 （距離の公式としての六斜術）　2 点 $P_1[\alpha_1,\ \beta_1]$，$P_2[\alpha_2,\ \beta_2]$ の距離を p とするとき，

$$K(\alpha_1,\ \beta_1,\ p;\ \beta_2,\ \alpha_2,\ e)=0$$

が成り立つ（図 15)。

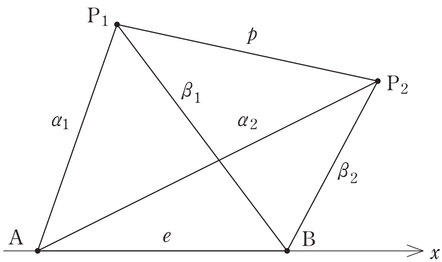

図 15　距離の公式としての六斜術

この定理2の式は p に関する複2次方程式で，2つの座標 $[\alpha_1,\ \beta_1]$ と $[\alpha_2,\ \beta_2]$ が式(6)をみたすとき，常に 4 実解 $\{\pm p_1,\ \pm p_2\}(0 \leqq p_1 \leqq p_2)$ を持つ[3]。そして，2 点 P_1, P_2 が共に E_+^2 上にあれば，その距離は非負解の小さい方の $d(P_1,\ P_2)=p_1$ となる。

六斜術は後の節でも用いるのでその性質についてもう少し述べる。その前にヘロンの公式に現れる式

$$H(a,\ b,\ c)=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

の性質について触れる[3, 定理2.2]。いわゆる三角不等式の関係が $H(a,\ b,\ c)$ の符号のみで表すことができる。

補題 15　3個の長さ $a,\ b,\ c$ が与えられたとき次の(i)〜(iii)が成り立つ。

(i)　長さ $a,\ b,\ c$ が平面上の三角形をなす3点で実現可能であるための必要十分条件は $H(a,\ b,\ c)>0$ である。

(ii)　長さ $a,\ b,\ c$ が直線上の3点で実現可能であるための必要十分条件は $H(a,\ b,\ c)=0$ である。

(iii)　長さ $a,\ b,\ c$ が平面上の3点で実現不可能であるための必要十分条件は $H(a,\ b,\ c)<0$ である。

六斜術の式では各変数が2乗の形で現れているが，2乗する前の式を $\overline{K}$ と表すことにする。

定義 8　式 $\overline{K}(A,\ B,\ C;\ X,\ Y,\ Z)$ を

$$\begin{aligned}&\overline{K}(A,\ B,\ C;\ X,\ Y,\ Z)\\&\quad =AX(-A+B+C-X+Y+Z)+BY(A-B+C+X-Y+Z)\\&\quad +CZ(A+B-C+X+Y-Z)-(ABZ+BCX+CAY+XYZ)\end{aligned}$$

と定める。

当然のことであるが $\overline{K}(a^2,\ b^2,\ c^2;\ x^2,\ y^2,\ z^2) = K(a,\ b,\ c;\ x,\ y,\ z)$ である。この $\overline{K}$ に関する興味ある公式が以下の補題である。

補題 16　式 $\overline{K}$ について次の関係式

$$\overline{K}(a^2+w,\ b^2+w,\ c^2+w;\ x^2,\ y^2,\ z^2) = \overline{K}(a^2,\ b^2,\ c^2;\ x^2,\ y^2,\ z^2) + wH(x,\ y,\ z)$$

が成り立つ。

（証明）　計算するだけなのでここでは省略する。 □

7　算　変　座　標

この節では，空間 E^2_∞ 上の有向円全体のなす集合 $O(E^2_\infty)$ 上に算変法の不変式 s を用いて座標系を定義する。

E^2_∞ 上の同一円束に属しない 3 有向定円 c_1，c_2，c_3 をとる。そして E^2_∞ 上の任意の有向円 c の座標 $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ を

$$[s_1,\ s_2,\ s_3] = [s(c,\ c_1),\ s(c,\ c_2),\ s(c,\ c_3)]$$

と定義し，円 c の**算変座標**と呼ぶことにする。また，算変座標を定める 3 有向円 c_1，c_2，c_3 を**基準 3 円**と呼ぶことにする。この節ではこの算変座標の基本性質について考察する。

補題 17　基準 3 円 c_1，c_2，c_3 に直交する円 c_o が存在すると仮定する。任意の有向円 c に対し $c' = -\nu_{c_o}(c)$ とするとき，2 有向円 c，c' の算変座標は一致する（図 16）。

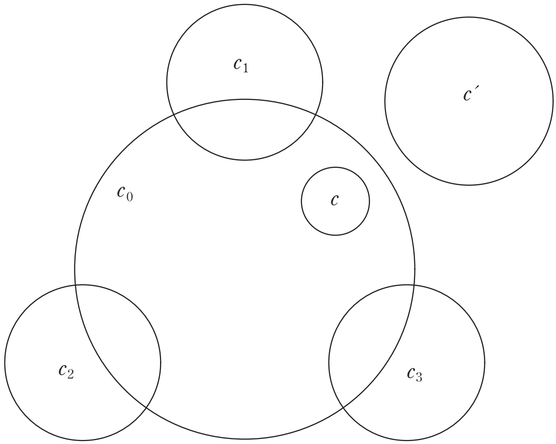

図 16　補題 17

（証明）　直交性により各 $i=1, 2, 3$ に対して補題 4 により $\nu_{c_0}(c_i)=-c_i$ である。従って補題 3 により各 $i=1, 2, 3$ に対して

$$s(c', c_i)=s(-\nu_{c_0}(c), -\nu_{c_0}(c_i))=s(\nu_{c_0}(c), \nu_{c_0}(c_i))=s(c, c_i)$$

となり，c と c' の算変座標は一致する。　□

この補題 17 からすぐに分かることは，基準 3 円に直交する円が多数存在するときは同じ算変座標を持つ円が多数存在することである。実際のところ基準 3 円が同一円束に属する場合は直交円が無数に存在することになり，算変座標は全く意味のない座標となる。従って基準 3 円は同一円束に属さないという仮定が必要である。

定義 9　基準 3 円 c_1，c_2，c_3 の相互の算変法不変式（反転距離）

$$(e_1,\ e_2,\ e_3)=(s(c_2,\ c_3),\ s(c_3,\ c_1),\ s(c_1,\ c_2))$$

を**基準距離**と呼ぶことにする。また基準距離に対し σ を

$$\sigma = e_1^2+e_2^2+e_3^2+2e_1e_2e_3-1$$

と定義する。

基準距離と σ は反転不変な性質である。基準３円が同一の円束に属しているときは，次の補題が成り立つ。

補題 18　３円 c_1，c_2，c_3 が同一円束に属すとき

$$\sigma = 0$$

である。

（証明）　３つの場合に分けて証明の概略を示す。
（楕円型：３円が２点を共有しているとき）　すなわち３円が共に２定点を通る場合は，相互のなす角を θ_1，θ_2，$\theta_3=\theta_1+\theta_2$ とおく。このとき系１により $e_i=\cos\theta_i$ なので加法定理より，

$$\begin{aligned} e_3 &= -\cos\theta_3 = -\cos(\theta_1+\theta_2) \\ &= -\cos\theta_1\ \cos\theta_2+\sin\theta_1\ \sin\theta_2 \\ &= -e_1e_2+\sin\theta_1\ \sin\theta_2 \end{aligned}$$

となり，移項して平方することで

$$
\begin{aligned}
(e_3+e_1e_2)^2 &= \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 \\
&= (1-\cos^2\theta_1)(1-\cos^2\theta_2) \\
&= (1-e_1^2)(1-e_2^2)
\end{aligned}
$$

となり，これを整理することで $\sigma=0$ を得る。
（放物型：３円が１点で接しているとき）　この場合は，e_1，e_2，e_3 の絶対値は１であり，値が -1 となる e_i は奇数個であることにより $\sigma=0$ となる。
（双曲型：どの２円も共有点を持たないとき）　この場合は反転により，３円は同心円であると仮定し，その符号つき半径を r_1，r_2，r_3 とする。このとき，

$$
e_1=-\frac{r_2^2+r_3^2}{2r_2r_3}
$$

であり e_2，e_3 も同様。あとは計算のみで $\sigma=0$ が導かれる。　□

六斜術を定義する式 K と σ の間には次の関係がある。

補題 19　基準３円 c_1，c_2，c_3 の中心と符号つき半径をそれぞれ O_1，O_2，O_3 と r_1，r_2，r_3 とする。また中心間の距離を

$$
x=d(\mathrm{O}_2,\ \mathrm{O}_3),\ y=d(\mathrm{O}_3,\ \mathrm{O}_1),\ z=d(\mathrm{O}_1,\ \mathrm{O}_2)
$$

とするとき，

$$
4r_1^2r_2^2r_3^2\sigma=-K(r_1,\ r_2,\ r_3;\ x,\ y,\ z)
$$

である。

（証明）　基準距離を

$$e_1=\frac{x^2-r_2^2-r_3^2}{2r_2r_3},\ e_2=\frac{y^2-r_3^2-r_1^2}{2r_3r_1},\ e_3=\frac{z^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}$$

とおき，あとは定義に従って計算し両辺を比較するだけである。詳細は省略する。□

定理 3　基準 3 円 c_1，c_2，c_3 の中心が三角形をなすとし，その根心を P とする。このとき次が成り立つ。

（i）　根心 P が 3 円の外部にあるための必要十分条件は $\sigma>0$ である。

（ii）　根心 P が 3 円の周上にあるための必要十分条件は $\sigma=0$ である。

（iii）　根心 P が 3 円の内部にあるための必要十分条件は $\sigma<0$ である。

（証明）　補題 19 の記号を用いる。また $i=1,\ 2,\ 3$ に対して $p_i=d(\mathrm{P},\ \mathrm{O}_i)$ とするとき，6 個の長さ p_1，p_2，p_3，x，y，z は 4 点 P，O_1，O_2，O_3 間の距離となるので，定理 1 により $K(p_1,\ p_2,\ p_3;\ x,\ y,\ z)=0$ である。

根心 P と 3 円 c_1，c_2，c_3 の方べきはすべて等しくそれを h とすれば，定義により

$$h=p_i^2-r_i^2\quad(i=1,\ 2,\ 3)$$

である。補題 19，補題 16 により

$$
\begin{aligned}
4r_1^2r_2^2r_3^2\sigma &= -K(r_1,\ r_2,\ r_3;\ x,\ y,\ z)\\
&= -\overline{K}(r_1^2,\ r_2^2,\ r_3^2;\ x^2,\ y^2,\ z^2)\\
&= -\overline{K}(p_1^2-h,\ p_2^2-h,\ p_3^2-h;\ x^2,\ y^2,\ z^2)\\
&= -\overline{K}(p_1^2,\ p_2^2,\ p_3^2;\ x^2,\ y^2,\ z^2)+hH(x,\ y,\ z)\\
&= -K(p_1,\ p_2,\ p_3;\ x,\ y,\ z)+hH(x,\ y,\ z)\\
&= hH(x,\ y,\ z)
\end{aligned}
$$

となる。ここで，基準3円の中心が三角形をなすことにより $H(x,\ y,\ z)>0$ なので，σ と h の符号は一致する。従って補題6により定理が成り立つ。 □

定理4　E_∞^2 上の3円を $c_1,\ c_2,\ c_3$ とする。その3円を基準3円としその基準距離を $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ とする。基準3円に直交する円がただ1つ存在するための必要十分条件は $\sigma>0$ である。

（証明）「3円に直交する円が存在する」と「$\sigma>0$」はともに反転不変な性質である。従って必要ならば反転することで，基準3円は E^2 上の円であると仮定してよい。基準3円の中心が三角形をなす場合は，補題12と定理3(i)により定理が成り立つことは明らかである。

残るのは，基準3円の中心が同一直線 l 上にある場合である。このとき l 自身が3円の直交円となっている。そこで，さらに反転させることにより基準3円と l のすべてを E^2 上の円に移す。そうすることで，基準3円 $c_1',\ c_2',\ c_3'$ とそれに直交する c' すべてが E^2 上の円となる。ここで，$c_1',\ c_2',\ c_3'$ の中心が三角形を成せば直交円がただ1つで $\sigma>0$ である。$c_1',\ c_2',\ c_3'$ の中心が同一直線上にあれば直交円が2つあることになり，かつ補題14と補題18により $\sigma=0$ となる。

以上により定理が示された。 □

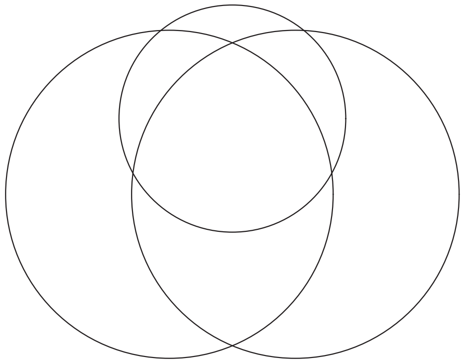

図 17　直交円が存在しない 3 円の例

また$\sigma<0$となる，根心 P が基準 3 円の内部にある場合としては，図 17 のような例がある。このような基準 3 円には直交円が存在しない。算変座標の基準 3 円としては直交円がただ 1 つであるような 3 円である方が応用する場が広い。そのため次節以降では，基準 3 円がただ 1 つの直交円をもつ$\sigma>0$の場合に限定することにする。

8　半 径 公 式

つぎに有向円 c の算変座標 $c[s_1, s_2, s_3]$ が与えられたとき，その円の符号つき半径 r を求める公式を作ることにする。公式は 4 円 c_1, c_2, c_3, c がすべて E^2 上の有向円であるとの前提で述べることにする。

定理 5（半径公式）　基準 3 円を E^2 上の c_1, c_2, c_3 とし，E^2 上の有向円 c の算変座標を $[s_1, s_2, s_3]$ とする。このとき，円 c の符号つき半径 r は次の 2 次方程式で求まる。

$$Ar^2+2Br+C=0$$

ここで，基準円の中心を O_1，O_2，O_3，半径を r_1，r_2，r_3 とし

$$
\begin{aligned}
& x=d(O_2,\ O_3),\ y=d(O_3,\ O_1),\ z=d(O_1,\ O_2) \\
& w=r_1^2+r_2^2+r_3^2+x^2+y^2+z^2 \\
& A=4s_1s_2r_1r_2(x^2+y^2-z^2)+4s_1s_3r_1r_3(x^2-y^2+z^2) \\
& \qquad +4s_2s_3r_2r_3(-x^2+y^2+z^2)-4(s_1^2r_1^2x^2+s_2^2r_2^2y^2+s_3^2r_3^2z^2) \\
& \qquad +(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^4+y^4+z^4) \\
& B=s_1r_1\left\{x^2(w-2x^2-3r_1^2)+(r_2^2-r_3^2)(y^2-z^2)\right\} \\
& \qquad +s_2r_2\left\{y^2(w-2y^2-3r_2^2)+(r_1^2-r_3^2)(x^2-z^2)\right\} \\
& \qquad +s_3r_3\left\{z^2(w-2z^2-3r_3^2)+(r_1^2-r_2^2)(x^2-y^2)\right\} \\
& C=K(r_1,\ r_2,\ r_3;\ x,\ y,\ z)
\end{aligned}
$$

とする。

（証明） 円 c の中心を O とするとき，補題5により

$$d(O,\ O_i)^2=r^2+r_i^2+2rr_is_i \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

と表すことができるので，4円 c_1，c_2，c_3，c の中心間の距離に六斜術を適用することで，関係式

$$\overline{K}(d(O,\ O_1)^2,\ d(O,\ O_2)^2,\ d(O,\ O_3)^2;\ x^2,\ y^2,\ z^2)=0$$

が得られる。これは10変数 r，r_1，r_2，r_3，s_1，s_2，s_3，x，y，z の関係式である。それを整理すると定理の式が得られる。詳細は省略する。 □

この定理の式は10変数もあるためものすごく複雑のように見えるが，そのほとんどが基準3円を定めたときに決まってしまう定数 r_1，r_2，r_3，x，y，z であり，例えば係数 a_i，b_i を事前に計算しておけば算変座標 $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ が与えられたときに

$$A = a_1s_1s_2 + a_2s_1s_3 + a_3s_2s_3 + a_4s_1^2 + a_5s_2^2 + a_6s_3^2 + a_7$$
$$B = b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3$$

といった計算をするだけで2次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$ の係数は確定する。

つぎに円 c の中心 O の位置を求める方法であるが，符号つき半径 r が定理5により求まることにより，基準3円の中心からの距離

$$d(\mathrm{O},\ \mathrm{O}_i) = \sqrt{r^2 + r_i^2 + 2rr_is_i} \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

の値が定まる。この距離により，円 c の中心 O の位置が一意に定まる。

以上により，算変座標 $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ が与えられたとき，定理5により2つの符号つき半径が求まり，その符号つき半径1つに対しその円の中心座標が1つ定まる。このことから，算変座標に対応する有向円は2つだけということも確認できた。そしてそれら2つの円は図16の c と c' のように，基準3円に直交する円 c_o に関して互いに反転像となっている。

また定理5の半径公式は，図18のように基準3円が互いに接する場合はより簡単な次の定理6となる。

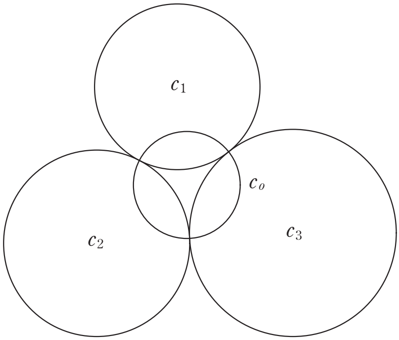

図18　基準3円が互いに接している場合

定理6（基準3円が互いに接する場合の半径公式）　E^2 上の基準3円 c_1, c_2, c_3 が互いに接し，基準距離を（1, 1, 1）とする。E^2 上の有向円 c の算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ が与えられたとき，円 c の符号つき半径 r は2次方程式

$$(p^2-4q)r^2-4qr_1r_2r_3r+4r_1^2r_2^2r_3^2=0$$

で求まり，解の公式は

$$r=\frac{2r_1r_2r_3}{p\pm2\sqrt{q}}$$

である。ここで，基準3円の符号つき半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とし

$$p=r_1(r_2+r_3)s_1+r_2(r_3+r_1)s_2+r_3(r_1+r_2)s_3$$
$$q=r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)(1+s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1)$$

とする。

（証明）　定理５に

$$x=|r_2+r_3|,\ y=|r_3+r_1|,\ z=|r_1+r_2|$$

を代入して整理することで r の２次方程式が得られる[6]。その解は，方程式を次のように変形し

$$(pr-2r_1r_2r_3)^2=4qr^2$$

両辺の平方根を取ることで得られる。　□

9　距　離　公　式

図 19 のように基準３円 c_1，c_2，c_3 があり，２有向円 c_s，c_t の算変座標をそれぞれ $[s_1,\ s_2,\ s_3]$, $[t_1,\ t_2,\ t_3]$ とする。このときに２円 c_s，c_t の算変法不変式（反転距離）の値 $x=s(c_s,\ c_t)$ を求める公式があると便利である。しかしその公式は 10 個の変数 e_1，e_2，e_3，s_1，s_2，s_3，t_1，t_2，t_3，x が関わる長い式であり取り扱いも大変である。また，それは数式処理ソフトウェアを用いて力業の計算で導く必要があるため，ここでは結果のみ紹介することとする。

計算式を簡潔に記述するために，変数 x_i，$y_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ に対して記号 $\hat{x}_i$，$\widehat{xy}_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ を次のように定める

$$\hat{x}_1=x_2x_3,\quad \hat{x}_2=x_3x_1,\quad \hat{x}_3=x_1x_2$$

$$\widehat{xy}_1=x_2y_3+x_3y_2,\quad \widehat{xy}_2=x_3y_1+x_1y_3,\quad \widehat{xy}_3=x_1y_2+x_2y_1$$

6）変数 x, y, z はすべて２乗されるので絶対値記号は消えてなくなる。

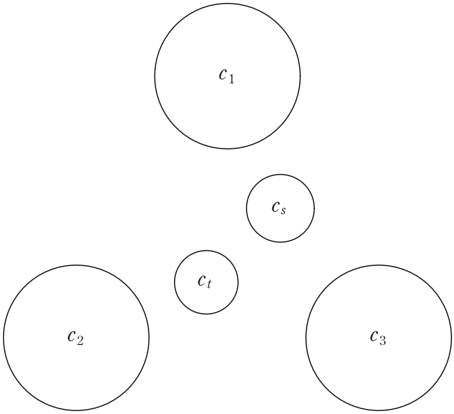

図 19　算変座標における距離公式

定理 7（距離公式）　E^2_∞ 上の基準 3 円 c_1，c_2，c_3 の基準距離を $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ とし，2 円 c_s，c_t の算変座標をそれぞれ $[s_1,\ s_2,\ s_3]$，$[t_1,\ t_2,\ t_3]$ とする。このとき $x=s(c_s,\ c_t)$ は次の 2 次方程式

$$\sigma^2x^2-2\sigma\rho x+\rho^2-(\sigma+\tau_s)(\sigma+\tau_t)=0$$

をみたし，その解の公式は

$$x=\frac{\rho\pm\sqrt{(\sigma+\tau_s)(\sigma+\tau_t)}}{\sigma}$$

である。ここで

$$\rho=\sum_{i=1}^{3}\left\{\widehat{st}_i\,(\hat{e}_i+e_i)+s_it_i\,(1-e_i^2)\right\}$$

$$\tau_s = \sum_{i=1}^{3} \left\{ 2\hat{s}_i(\hat{e}_i + e_i) + s_i^2(1 - e_i^2) \right\}$$

$$\tau_t = \sum_{i=1}^{3} \left\{ 2\hat{t}_i(\hat{e}_i + e_i) + t_i^2(1 - e_i^2) \right\}$$

とする。

図20のように基準3円c_1，c_2，c_3が互いに接していて，その隙間に2円c_s，c_tがある場合が応用上重要である。その場合の距離公式については証明を与える。

定理8（基準3円が互いに接する場合の距離公式）　E_∞^2上の基準3円c_1，c_2，c_3が互いに接していて基準距離が（1，1，1）とする。2有向円c_s，c_tの算変座標をそれぞれ$[s_1, s_2, s_3]$，$[t_1, t_2, t_3]$とし$x = s(c_s, c_t)$とする。このときxは次の2次方程式

$$4x^2 - 4\rho x + \rho^2 - 4\tau_s\tau_t = 0 \tag{7}$$

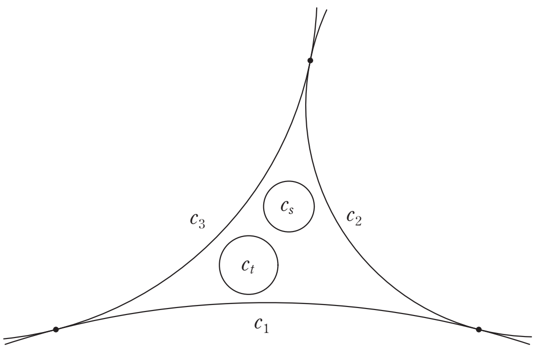

図20　定理8

をみたし，その解の公式は

$$x=\frac{\rho}{2}\pm\sqrt{\tau_s\tau_t}$$

である。ここで

$$\begin{aligned}\rho &= s_1t_2+s_2t_1+s_2t_3+s_3t_2+s_3t_1+s_1t_3\\ \tau_s &= 1+s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1\\ \tau_t &= 1+t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1\end{aligned}$$

とする。

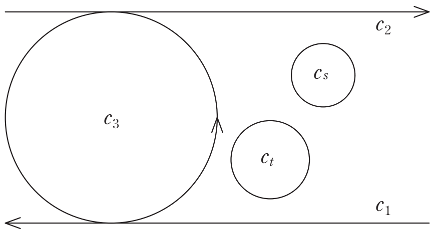

図 21　定理 8 の証明

（証明）　反転により 5 円は E^2 上で図 21 のようになっていると仮定してよい。c_1，c_2 は x 軸と平行な 2 直線とし，円 c_3 は原点を中心とする半径 1 の円とし，向きは図 21 のようにとる。円 c_s の中心を (x_s, y_s)，符号付き半径を r_s とする。円 c_t の中心を (x_t, y_t)，符号付き半径を r_t とする。

　このとき

$$s_1=\frac{y_s+1}{r_s},\quad s_2=\frac{1-y_s}{r_s},\quad s_3=\frac{x_s^2+y_s^2-r_s^2-1}{2r_s}$$
$$t_1=\frac{y_t+1}{r_t},\quad t_2=\frac{1-y_t}{r_t},\quad t_3=\frac{x_t^2+y_t^2-r_t^2-1}{2r_t}$$
$$x=\frac{(x_s-x_t)^2+(y_s-y_t)^2-r_s^2-r_t^2}{2r_s r_t}$$

となる。ここで $S=s_1+s_2$，$T=t_1+t_2$，$U=s_1t_2-s_2t_1$ とおくとき，最初の 3 式から

$$x_s^2=\frac{4\tau_s}{S^2}$$

次の 3 式から

$$x_t^2=\frac{4\tau_t}{T^2}$$

最後の式から

$$(x_s-x_t)^2=\frac{4(S^2+T^2-U^2+2STx)}{S^2T^2}$$

が得られる。あとは次の補題 20 を利用し式を整理すればよい。 □

補題 20　変数 p，q が

$$p^2=A,\quad q^2=B,\quad (p\pm q)^2=C$$

をみたせば

$$(A+B-C)^2=4AB$$

である。

（証明）

$$C-A-B=(p\pm q)^2-p^2-q^2=\pm 2pq$$

両辺を平方して

$$(A+B-C)^2=4p^2q^2=4AB$$

となる。 □

10 応 用

この節では算変座標を求める例題をいくつか取り上げることで，算変座標の有用性を示す。

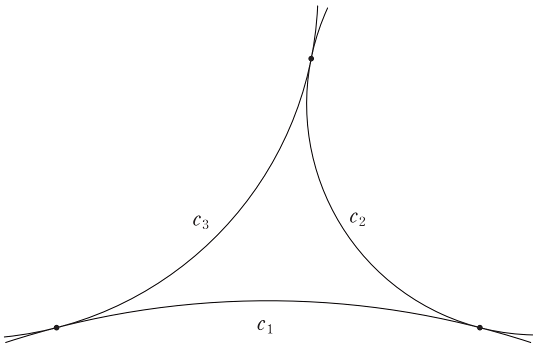

図 22 例題に用いる基準 3 円

例題を取り上げるにあたり，基準３円としては図 22 のように互いに接する３円 c_1，c_2，c_3 でその基準距離は $(1,\ 1,\ 1)$ と仮定する。また，算変座標を求める円の向きはすべて反時計回りとする。

定理８の２次方程式(7)を２円 c_s，c_t が接している $(x=1)$ という条件のもとでこの節では利用する。そこで，式(7)の左辺に $x=1$ を代入した式を

$$J([s_1,\ s_2,\ s_3],\ [t_1,\ t_2,\ t_3])=(\rho-2)^2-4\tau_s\tau_t$$

と表すことにして，計算の中ではこの式 J を用いで説明する。

例題 1　図 23 の４円 c_s，c_t，c_u，c_v の算変座標を求めよ。また，基準３円の半径を $r_1=5$，$r_2=3$，$r_3=4$ とするときの４円の半径 r_s，r_t，r_u，r_v を求めよ。

（解答）　円 c_s は基準３円に接しているのでその算変座標は明らかに $[1,\ 1,\ 1]$ である。３円 c_t，c_u，c_v の算変座標は対称性によりそれぞれ $[t, 1, 1]$, $[1, t, 1]$, $[1, 1, t]$ と表すことができる。c_s，c_t に定理８の距離公式を用いて，

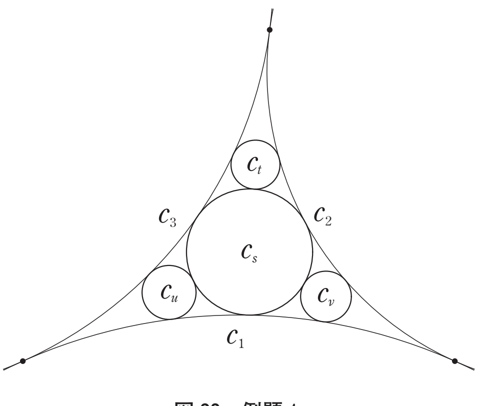

図 23　例題 1

$$J([1,\ 1,\ 1],\ [t,\ 1,\ 1]) = 4(t-7)(t+1) = 0$$

となり，$t > 1$ より，$t = 7$ である。

つぎに $r_1 = 5$，$r_2 = 3$，$r_3 = 4$ を定理 6 の半径公式にあてはめると

$$p = 35s_1 + 27s_2 + 32s_3,\quad q = 720(1 + s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3),\quad r = \frac{120}{p + 2\sqrt{q}}$$

である。これに算変座標を代入すると,

$$r_s = \frac{120}{94 + 48\sqrt{5}} = 0.596,\quad r_t = \frac{120}{304 + 96\sqrt{5}} = 0.231,$$
$$r_u = \frac{120}{256 + 96\sqrt{5}} = 0.255,\quad r_v = \frac{120}{286 + 96\sqrt{5}} = 0.240,$$

のように各円の半径が求まる。

例題 2　図 24 の 3 円 c_s，c_t，c_u の算変座標を求めよ。

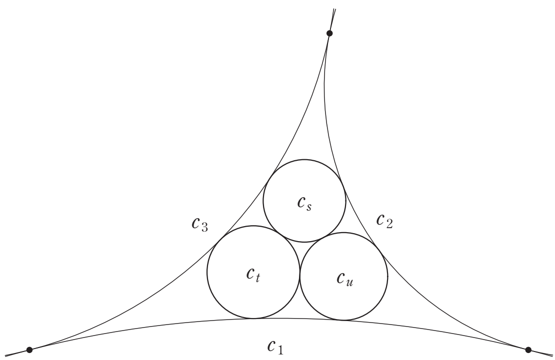

図 24　例題 2

（解答） 3円 c_s, c_t, c_u の算変座標は対称性によりそれぞれ $[s, 1, 1]$, $[1, s, 1]$ $[1, 1, s]$ と表すことができる。c_s, c_t に距離公式を用いて,

$$J([s,\ 1,\ 1],\ [1,\ s,\ 1])=(s-3)(s+1)^2(s+5)=0$$

となり，$s>1$ より，$t=3$ である。

例題 3 図 25 の 4 円 c_s, c_t, c_u, c_v の算変座標を求めよ。

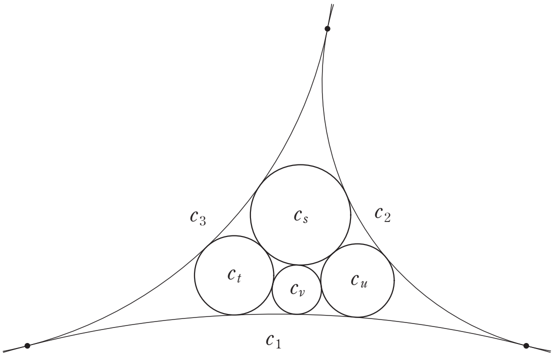

図 25 例題 3

（解答） 4円 c_s, c_t, c_u, c_v の算変座標はそれぞれ $[s, 1, 1]$, $[1, t, 1]$, $[1, 1, t]$, $[1, v, v]$ と表すことができる。c_s, c_t に距離公式を用いて

$$J([s,\ 1,\ 1],\ [1,\ t,\ 1])=(s+1)(t+1)(st+s+t-15)=0$$

となり，$s, t>1$ より,

$$st+s+t-15=0 \tag{8}$$

である。c_s，c_v に距離公式を用いて

$$J([s,\ 1,\ 1],\ [1,\ v,\ v])=4(s+1)(sv^2-v^2-4v-2)=0$$

となり，$s>1$ より，

$$sv^2-v^2-4v-2=0 \tag{9}$$

である。c_t，c_v に距離公式を用いて $J([1,\ t,\ 1],\ [1,\ v,\ v])=0$ を計算すると，

$$t^2v^2+2t^2v-2tv^2+t^2-12tv+v^2-10t-22v-7=0 \tag{10}$$

である。連立方程式(8)，(9)，(10)を解いて $s,\ t,\ v>1$ なる解を求めると

$$s=11-4\sqrt{5},\quad t=2+\sqrt{5},\quad v=2+\sqrt{5}$$

となる。

例題 4　図 26 の 5 円 c_s，c_t，c_u，c_v，c_w の算変座標を求めよ。

（解 答）　5 円 c_s，c_t，c_u，c_v，c_w の算変座標はそれぞれ $[s, 1, 1]$, $[1, t, 1]$, $[1,\ 1,\ t]$, $[1, v, w]$, $[1, w, v]$ $(v>w)$ と表すことができる。c_s，c_t に距離公式を用いると前問と同じ式(8)が成り立つ。c_v，c_w に距離公式を用いると

$$J([1,\ v,\ w],\ [1,\ w,\ v])=(v+w)(v+w+4)(v-w+2)(v-w-2)=0$$

となり，$v>w>1$ により

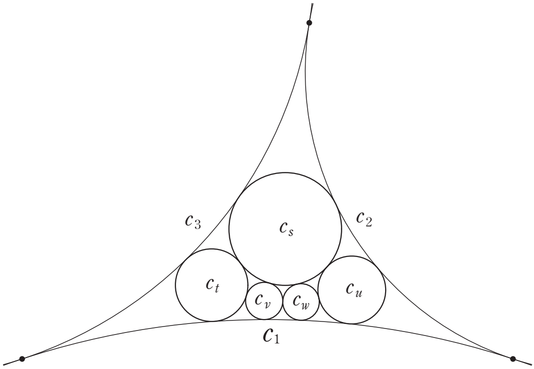

図 26　例題 4

$$v = w + 2 \tag{11}$$

となる。c_s，c_v に距離公式を用いて $J([s,\ 1,\ 1],\ [1,\ v,\ w]) = 0$ とし，式(11)を代入して

$$sw + s - w - 5 = 0 \tag{12}$$

である。c_t，c_v に距離公式を用いて $J([1,\ t,\ 1],\ [1,\ v,\ w]) = 0$ とし，式(11)を代入して

$$t^2 w + t^2 - 2tw - 18t + w - 15 = 0 \tag{13}$$

である。最後に，連立方程式(8)，(12)，(13)を解いて $s,\ t,\ w > 1$ なる解を求めることで

$$s = \frac{5}{3},\quad t = 5,\quad v = 7,\quad w = 5$$

を得る。

最後の例題として大西佐兵衛著『雑題』の問題 4-1 を取り上げることにする。

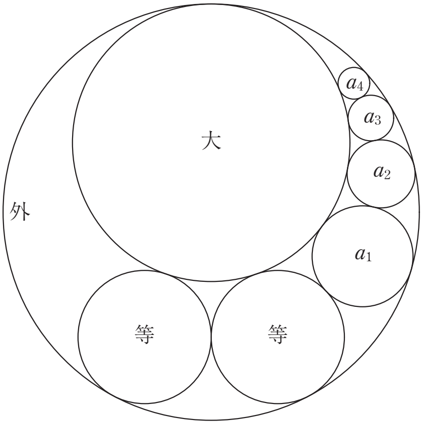

図 27　例題 5

例題 5　図 27 のように，円内に次々に累円を容れる。外円径と大円径が与えられたとき累円径を求めよ。

基準 3 円を図 28 のようにとる。外円が c_1，大円が c_2，円 c_3 は 3 円の中心が一直線上になるように円 c_1 と c_2 の間にとった円である。円 c_1 の向きは時計回り，2 円 c_2，c_3 の向きは反時計回りとするとき基準距離は（1，1，1）となるので定理 6 の半径公式が適用できる。

基準 3 円の半径を r_1，r_2，$r_3 = r_1 - r_2$（r_1，r_2，$r_3 > 0$）とするとき，3 円の符号つき半径は $-r_1$，r_2，$r_3 = r_1 - r_2$ となるので，これを定理 6 に代入することで，算変座標 $[s_1,\ s_2,\ s_3]$ をもつ円の半径 r を求める公式は

$$r = \frac{2r_1 r_2 (r_1 - r_2)}{r_1^2 s_1 + r_2^2 s_2 + (r_1 - r_2)^2 s_3} = \frac{2r_1 r_2 r_3}{r_1^2 s_1 + r_2^2 s_2 + r_3^2 s_3} \tag{14}$$

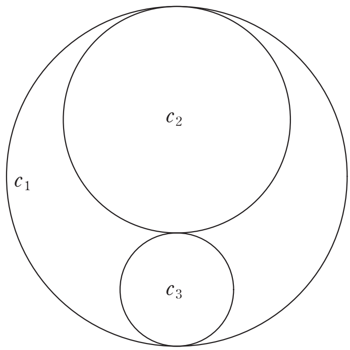

図 28　基準 3 円

と表すことができる。

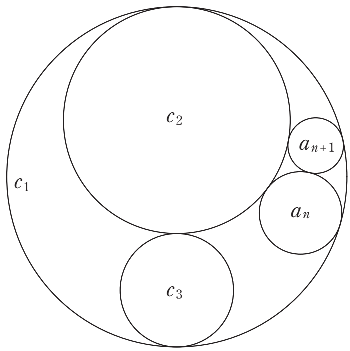

図 29　隣接する 2 円

図 29 のように累円中の隣接 2 円を a_n, a_{n+1} とするとき，それぞれ算変座標は [1, 1, s_n], [1, 1, s_{n+1}] と表すことができる。そこで，定理 8 の距離公式を用いて $J([1, 1, s_n], [1, 1, x]) = 0$ を計算すると

$$x^2 - 2(s_n + 2)x + s_n^2 - 4s_n - 4 = 0$$

となる。この x の 2 次方程式の 2 解が s_{n+1} と s_{n-1} なので，解と係数の関係により

$$s_{n+1}+s_{n-1}=2(s_n+2)$$

を得る。特に 2 個の等円は a_{-1}，a_0 とみなすことができ，その算変座標はともに $[1,\ 1,\ s_0]$ なので，$J([1,\ 1,\ s_0],\ [1,\ 1,\ s_0])=0$ を計算することにより，$s_0=-\dfrac{1}{2}$ となる。従って，数列 $\{s_i\}$ は隣接 3 項間漸化式

$$s_{-1}=s_0=-\frac{1}{2},\quad s_{n+1}+s_{n-1}=2(s_n+2)$$

をみたす。この漸化式を解くと

$$s_n=\frac{(2n+1)^2}{2}-1$$

となる。式⒁に算変座標 $[1,\ 1,\ s_n]$ を代入することで円 a_n の半径 p_n は

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{2r_1r_2(r_1-r_2)}{r_1^2+r_2^2+(r_1-r_2)^2\left\{\dfrac{(2n+1)^2}{2}-1\right\}} \\ &= \frac{4r_1r_2(r_1-r_2)}{(2n+1)^2(r_1-r_2)^2+4r_1r_2} \end{aligned}$$

となる。

11　ま　と　め

この論文では，算変法の不変式を用いて算変座標を定義し，その座標系を活用するための基本公式として，半径公式，距離公式の 2 つの公式を導いた。そ

れらの活用方法を，応用として５つの例題を解くことで示した。これらの例題から分かるように，反転図を作ることなく距離公式をあてはめて（連立）方程式を解くだけで算変座標は計算できる。算変座標が求まれば半径公式により円の半径が求まり，さらに円の中心位置も求めることができる。

算変座標を用いるこの手法が，反転法や算変法と同様に和算問題の研究に役立つことを願っている。

参　考　文　献

［1］P. L. Bowers and M. K. Hurdal, Planar Conformal Mappings of Piecewise Flat Surfaces, *Visualization and Mathematics Ⅲ*, Springer,（2003）, 3-34.

［2］H. S. M. Coxeter, Inversive distance, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 71 (1966), 73-83.

［3］平田浩一，六斜術とトレミーの定理の関係について，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，18-1 (2011)，1-12.

［4］平田浩一，算変法不変式の定義と応用について，第25回数学史研究発表会発表資料，2018.

［5］田部井勝稲・平田浩一・松本登志雄，法道寺型と非法道寺型の反転不変式について，和算ジャーナル，第２号（2018)，66-72.

［6］田部井勝稲・松本登志雄，『高校数学で解く日本の図形問題　反転法と算変法』，一粒書房，2014.