

松 山 大 学 論 集
第 25 卷 第 6 号 抜 刷
2 0 1 4 年 2 月 発 行

マナーラ問題への解答

宮 本 順 介

マナーラ問題への解答

A Solution to the Manara Problem

宮 本 順 介

概 要

This article addresses the Manala problem wherein the Standard ratio is not necessarily a real number in Sraffa's joint production model. This phenomenon was first identified by Carlo Felice Manara and is called the Manala problem. Recently Dupertuis and Sinha denied the existence of Manala problem. In this paper we determine the flaw in the Dupertuis and Sinha argument, and provide the solution for the Manala problem as follows. If a convex polyhedral cone generated by output vectors contains a convex polyhedral cone generated by input vectors, the standard ratio becomes real. We can easily prove this by using Mangasarian's generalized Perron – Frobenius theorem.

JEL : B24

key words : Sraffa, joint production, Standard system, Standard ratio

1 は じ め に

『商品による商品の生産』の第2部「多生産物産業と固定資本」の数学的分析はカルロ・フェリーチェ・マナーラの論文「商品による商品の結合生産に関するスラッフアのモデル」¹⁾によってその端緒が開かれた。このいわば古典的論文においてマナーラは、結合生産物体系では必ずしも実数の範囲で標準体系

1) Manara [7]

を構成できないので、実数の標準比率の存在をあらかじめ仮定しなければならないと述べた。しかしそのための条件が何かについてはなにも述べておらず、問題は未解決のまま残された。マナーラのこの問題提起（以下これをマナーラ問題と呼ぶ）を疑問視する研究は最近まで見あたらなかったが、2009年、M-S. デュペルテュイとアジット・シンハがこの問題を取り上げ、適切に定義された経済体系においてはマナーラ問題は存在しないという主張を展開した²⁾。本稿の目的は1) デュペルテュイ＝シンハの主張を退け、マナーラ問題は存在するという立場に立ち、2) マナーラ問題への解答を提示することにある。2でマナーラ問題について説明する。3でデュペルテュイ＝シンハの議論、とりわけ彼らの議論の中核をなす「過剰な生産体系」(superfluous process of production)という考え方を紹介する。4では、デュペルテュイ＝シンハの議論が成立しない数値例を示す。ついでそうした数値例が存在するのは、彼らの「過剰な生産体系」という考え方に問題があるのではないかということで、その有効性について検討し、その問題点を明らかにする。5では、4の数値例がマンガサリアンの一般化ペロン・フロベニウス定理³⁾にもとづいていることに着目し、産出ベクトルが生成する錐体のなかに投入ベクトルが生成する錐体が含まれることが実数の標準比率が存在するための条件であることを、マンガサリアンのペロン・フロベニウス定理を使って論証する。

2 マナーラ問題

結合生産物体系のもとで標準体系を構成しようとするとき、単一生産物の体系にはない複雑さに遭遇する。スラフファはこの点を次のように説明する。

その仕事（標準体系を構成する仕事－引用者）に進むに先立って、行手に立ちふさがる若干の困難を取除いておくことが必要である。こうした困難

2) Dupertuis, M-S. and A. S. Sinha [3], Sinha, A. [15] pp.300-302.

3) Mangasarian, O. L. [8]

は、相互関係の複雑性がいっそう大きいことから生ずるのであって、その結果、一方では負の数量がまぎれこむことになり、他方では、生産物と産業との一対一の関係が消え失せることになるのである⁴⁾

これらの困難に対して、スラッファは、まず、負の乗数が排除できない点については、負の乗数の意味づけを行うことでこの困難を取り除く⁵⁾ つぎに、結合生産物体系では生産物と生産プロセスが一対一に対応せず、その結果単一生産物体系のもとで定義した基礎財と非基礎財の定義が使えなくなる問題については、より一般的な基礎財と非基礎財の定義を与えることでこの困難の解決方法を提案する⁶⁾

2つの困難を取り除いたうえで、スラッファは結合生産物体系における標準商品の説明⁷⁾に取りかかる。しかし『商品による商品の生産』出版後、スラッファの気づいていない別の困難がマナーラによって指摘された⁸⁾ それは、結合生産物体系においては標準商品が実数の範囲で必ず存在するわけではないという、より根源的な問題の指摘である。マナーラの主張を式を用いて説明しよう。記号を次のように定める。

$A = (a_{ij}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$: 投入行列

a_{ij} : 第 i 生産過程に投入される第 j 商品の量

$B = (b_{ij}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$: 産出行列

b_{ij} : 第 i 生産過程で産出される第 j 商品の量

r : 利潤率

R : 標準比率 (極大利潤率)

4) Sraffa [16], p. 46, 邦訳 76 ページ。

5) Sraffa [16], pp. 47-48, 邦訳 77-80 ページ。

6) Sraffa [16], pp. 49-52, 邦訳 80-86 ページ。

7) Sraffa [16], pp. 52-54, 邦訳 86-90 ページ。

8) Manara [7]

\mathbf{q} : 標準体系を与える乗数ベクトル ($n \times 1$)

標準体系を構成する乗数および標準比率は方程式

$$(1) \quad (1+R)A'\mathbf{q} = B'\mathbf{q}$$

で定義される。⁹⁾ (1)式を書き換えると

$$(2) \quad (B' - (1+R)A')\mathbf{q} = 0.$$

ベクトル \mathbf{q} がゼロ以外の解を持つための必要十分条件は

$$(3) \quad |B' - (1+R)A'| = 0$$

である。ところで一般に、 n 次の固有方程式 $|B' - \lambda A'| = 0$ は固有値の範囲を複素数まで広げるとき、重複を含む n 個の解をもつことが知られている。したがって $|B' - (1+R)A'| = 0$ を満たす R は必ず存在し、非負ベクトルであるかどうかを別にして、乗数ベクトル $\mathbf{q} (\neq 0)$ も存在する。

ただし、(3)式は(1)式から導かれたものであるので、その解は極大利潤率であり、正の実数値でなければならない。単一生産物体系においては、産出行列 B が単位行列になるので、ペロン・フロベニウスの定理により正の固有値が存在し、正の極大利潤率が存在する。しかし B が単位行列でない場合にはそのような保証はない。スラッファは乗数ベクトル \mathbf{q} の要素に負の数が含まれるという事実には気づいていたが、標準比率 R が複素数になるかもしれないということには気づいていなかった。この問題はマナーラによって初めて指摘された。標準比率が複素数になる例として、マナーラは次の数値例をあげる。

9) / (肩につけたダッシュ) は転置行列を表す、転置ベクトルについても同様。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1.1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1.09 & 1.144 \\ 1.144 & 0.99 \end{pmatrix}$$

ここで $\lambda = 1 + R$ とおき、この数値を(3)式に当てはめ展開すると

$$(4) \quad 0.21\lambda^2 - 0.4368\lambda + 0.229636 = 0$$

となる。これを解くと $\lambda = 1.04 \pm 0.109109i$ となり、標準比率は複素数となる。ちなみに、この場合の乗数は

$$q' = (-0.642824 \pm 0.294579i \quad 0.707107 + 0.1i)$$

となり、乗数ベクトルも複素数となる。マナーラはこの数値例を根拠に、結合生産物体系において標準商品を構成するためには、固有方程式 $|B' - (1+R)A'| = 0$ は少なくとも1つの正の実根をもつことを仮定する必要があるという¹⁰⁾。ただしマナーラはこれは標準商品が存在するために必要な仮説 (ipotesi) であると述べるにとどまり、そのための具体的条件は明らかにしていない。

マナーラの指摘を否定する議論は最近まで存在しなかったが、2009年、デュペルテュイとシンハがマナーラ問題の存在そのものを否定する論文を発表した。彼らはつぎのように言う。結合生産物体系を単一生産物体系と同様にとらえようとすることからマナーラの問題は生ずるのであって、経済体系を適切に定義し直すときにはマナーラ問題は消滅する、と。節をあらためて彼らの主張を紹介しよう。

10) Manara [7] pp. 13-14 (英訳 p. 10, 邦訳 23 ページ)

3 デュペルテュイ＝シンハの「過剰な生産体系」

3.1 観察者の視点から経済の視点への転換

スラッファは『商品による商品の生産』57節においてつぎのように述べている。

結合生産物体系の複雑性から生ずるもので、われわれが標準商品の構成にとりかかりうるまでに、考察しておかねばならぬ困難がもう一つある。

基礎的生産物と非基礎的生産物とを区別するために、先に採用した判定基準（すなわち、それらの商品が、直接間接に一切の商品の生産手段に入るか、それともはいらないか）は、いまや役に立たない。なぜなら、各商品はいくつかの産業によって生産されるから、ある一商品を生産する諸産業のうち一つの産業だけに生産手段として入った生産物は、直接その商品の生産手段に入るものとみなすべきか否かが、不確かとなるからである。そして、この不確実性は、当然、かかる生産物は、そのような商品が生産手段として入ってゆく諸商品の生産に、「間接に」入るか否か、という問題にまで拡大されるであろう¹¹⁾

スラッファは結合生産物体系においては商品と生産過程が一对一に対応しないために、基礎財と非基礎財の新たな定義を考える必要があると述べている。この問題意識を引き継ぎ、デュペルテュイとシンハは結合生産物体系のもとでは、基礎財と非基礎財の新定義が必要になるだけではなく、経済体系や財そのものを定義し直す必要があると考える。どのように再定義すべきかについて、『財』は体系の観点から定義されるべきであって、観察者（observer）の観点から定義されるべきではない¹²⁾ という。観察者の観点と経済体系の観点の違

11) Sraffa [16], pp. 49-50, 邦訳 80-81 ページ。

12) Dupertuis, M-S. and A. S. Sinha [3], p. 432

いはつぎのように説明される.

すべての過程が1:1の同じ比率で二つの財「 x 」と「 y 」を使用している
としよう. 外部の観察者からみると, その体系は二つの別個の財「 x 」と
「 y 」を使用しつつ, 生産している. しかし実際上は, 体系はつねに $(x \oplus y)$
のひと塊を一つの財として他の財と互いに交換をしている. したがって体
系の観点からみると, 二つの財「 x 」と「 y 」が世の中に存在しているの
ではなく, 一つの財「 z 」($= x \oplus y$) が存在している.

それゆえ, われわれがなすべきことは, 財を体系そのものの内的な構造
の観点から定義する方法を見つけだすことである.¹³⁾

単一生産物体系の場合には, 生産構造を記述した生産体系と価格・利潤率・標
準商品を決定する経済体系とは一致する. しかし結合生産物体系においてはそ
れらは必ずしも同じものではない. よって観察された未加工の生産過程を価格
決定のための経済体系にとらえ直す必要がある. これがデュペルテュイとシン
ハの議論の出発点である.

3.2 「過剰な生産体系」

財を「内的な構造の観点から定義する」とはどういうことなのか. デュペル
テュイとシンハによれば, それは, 「過剰な生産過程 (superfluous processes)」
を体系から取り除くことだという. 彼らの論文に沿って説明しよう.¹⁴⁾

1. 記号: 生産過程の数を m , 財の数を n とする. 生産過程 i において投
入される第 j 財の量を a_{ij} とし, 生産される第 j 財の量を b_{ij} とする. $A =$
(a_{ij}) ($m \times n$) を投入行列, $B = (b_{ij})$ ($m \times n$) を産出行列とする. 経済体

13) Dupertuis, M-S. and A. S. Sinha [3], p. 434

14) Dupertuis, M-S. and A. S. Sinha [3], pp. 436-438

系を σ とおく. σ は A と B からなり, $\sigma=(A \rightarrow B)$ と表記する. つぎに経済体系の集合を $\sum_{m \times n}=\{A \rightarrow B|A, B \in M_{m \times n}\}$ とする. ただし $M_{m \times n}$ は非負の実数を成分とする $(m \times n)$ 行列の全体からなる集合である.

2. 自己再生産的: すべての $1 \leq j \leq n$ に対して

$$(5) \quad \sum_i a_{ij} \leq \sum_i b_{ij}$$

であれば, 体系 $\sigma \in \sum_{m \times n}$ は自己再生産的 (self-reproducing)¹⁵⁾であるという.

3. 小体系: 自然数の集合 $I \subset \{1, \dots, m\}$ を考える. ただし $I \neq \emptyset$ とする.

体系 σ の行 (=生産過程) が I に含まれる番号だけで構成されるとき, これを小体系 (subsystem)¹⁶⁾とよび, $\sigma_I \in \sum_{m \times n}$ とおく.

4. 「過剰な生産過程」: 体系 σ が自己再生産的な小体系を含むとき, 体系は「過剰な生産過程」(superfluous processes)をもつという. 「過剰な生産過程」とはその生産過程を取り除いても, 体系の自己再生産性が損なわれることのない生産過程のことである. 「過剰な生産過程」を含む体系を「過剰な生産体系」とよぶ. なお自己再生産的な小体系のことを中核体系 (atomic system)ともよぶ. またここで定義した「過剰な生産体系」という考え方は財についても同じように定義される.

「過剰な生産体系」の具体例としてデュペルテュイとシンハはつぎの数値例をあげる.¹⁷⁾

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

15) 純生産可能条件ともいう.

16) 『商品による商品の生産』の付録Aで定義される「小体系」(sub-systems)とは別のものであることに注意.

17) Dupertuis, M-S. and A. S. Sinha [3], p. 442

この数値例の場合、第1生産過程は(1, 1)を投入し(2, 1)を産出しており、第2生産過程の助けを借りることなく再生産が可能である。よって第1生産過程は自己再生産的な小体系、すなわち中核体系である。それに対して、第2生産過程はそれを取り除いても体系の存続を危うくすることはないので「過剰な生産過程」である。かくてこの生産体系は「過剰な生産過程」を含む「過剰な生産体系」ということになる。

3.3 体系の変換

「過剰な生産過程」という基準を用いると、観察された（ありのままの）生産体系はどのように変換されるのであろうか。デュペルテュイ＝シンハの説明を紹介しよう¹⁸⁾ つぎの生産体系を考える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

第3生産過程は他の2つの生産過程の合計になっているので、第1生産過程と第2生産過程だけで構成される経済体系を考えると、そこで成立する極大利潤率は第3生産過程の極大利潤率に等しいはずである。そこで第3生産過程を取り除き、体系を

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

に書き換える。極大利潤率と価格に関心があるので、さらに

18) Dupertuis, M-S. and A. S. Sinha [3], p. 444

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に書き換える。¹⁹⁾ ついで財をつぎのように再定義する。新たな第1財を(1, 1, 0), すなわち旧第1財1単位と旧第2財1単位の合成財と再定義し, 新たな第2財については(0, 1, 0), すなわち旧第2財1単位と再定義し, 新たな第3財については(0, 1, 1), すなわち旧第2財1単位と旧第3財1単位と再定義する。すると体系は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。新第2財は非中核財であるので新第2財を取り除いても価格体系に影響を及ぼさない。したがって体系は最終的に

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

に書き換えることができる。

3.4 マナーラ問題への適用

デュペルテュイ＝シンハは、「過剰な生産体系」を定義し、「過剰な生産体系」を取り除くことで観察された体系の背後に隠れている中核の生産体系を取り出し, そのような操作をとおしても標準体系の構成には影響がないことを論証する。²⁰⁾ こうした準備のうえで, 彼らはマナーラの数値例を検討する。²¹⁾ 彼らはマナーラの数値例

19) 規模に関する収穫一定を仮定しているわけでないことに注意。

20) 論証に必要な一連の補題と命題の証明については Dupertuis, M-S. and A. S. Sinha [3], pp. 446-450 を参照。

21) Dupertuis, M-S. and A. S. Sinha [3], pp. 452-453.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.09 & 1.144 \\ 1.144 & 0.99 \end{pmatrix}$$

について次のように言う。「第1生産過程が自己再生産的であり、過剰な生産過程および隠された非中核財を取り除くと、小麦体系 (corn system) (1.1)→(1.144) が出現する」²²⁾ 説明を補足しよう。第2生産過程は過剰な生産体系であるので、これを消去し(1 1.1)→(1.09 1.144)を残す。ところで第1生産過程の利潤率は0.04と0.09の間にあり、第2生産過程の利潤率は-0.01と0.04の間にある。2つの生産過程が同じ極大利潤率を取る必要があるので極大利潤率は0.04となる。したがって第1生産過程の第2財は非中核財となり、極大利潤率を決める生産体系としては(1.1)→(1.144)を考えればよい。マナーラの提示した数値例において標準比率(極大利潤率)が虚数をとったのは、「過剰な生産過程」を含む「過剰な生産体系」を考えたからであり、「過剰な生産過程」を取り除けば虚数ではなく実数の標準比率0.04がえられる。

デュベルテュイ＝シンハの議論をまとめるとつぎのようになる。マナーラの示した数値例は「過剰な生産過程」を含んでいる。しかし価格の決定にとって「過剰な生産過程」は不要であり、これを取り除く必要がある。「過剰な生産過程」を取り除けば標準比率は実数値をとる。マナーラ問題は不適切な生産体系にもとづいた議論であり、適切な生産体系のもとではマナーラ問題は発生しない。

4 「過剰な生産体系」論の検討

4.1 数値例による検討

デュベルテュイとシンハの「過剰な生産体系」論に沿ってマナーラ問題を考えてよいのだろうか。ここでマナーラの数値例に変更を加えたつぎの生産体系

22) Dupertuis, M-S. and A. S. Sinha [3], pp. 453.

を考える.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1.1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1.09 & 2 \\ 1.144 & 0.99 \end{pmatrix}$$

この数値例はマナーラの数値例の第1生産過程の第2生産量を1.144から2に変更している. この生産体系も, マナーラの数値例と同様に, 第1生産過程は自己再生産的であり, 第2生産過程はそうではない. したがってこの生産体系も「過剰な生産体系」である. この新たな「過剰な生産体系」について標準比率が複素数をとるかどうかを調べることにする. 以前の議論と同様に上の数値を(3)式に当てはめ展開すると,

$$(6) \quad 0.21\lambda^2 - 1.3784\lambda + 1.2089 = 0$$

となり, これを解くと $\lambda = 5.52115, 1.04266$ となる. この数値例の場合, 「過剰な生産体系」であるが, 標準比率は複素数ではなく実数値をとる. 「過剰な生産体系」であるからといって, 標準比率が必ず虚数になるわけではない. デュペルテュイとシンハの「過剰な生産体系」論ではこの数値例を説明することができない.

4.2 均等利潤可能曲線

うえの数値例はデュペルテュイ＝シンハの議論に欠陥があることを示唆している. そこで2部門経済のモデルを用いて, デュペルテュイ＝シンハの「過剰な生産体系」論の問題点を考察することにする. 利潤率が与えられたとき, すべての部門でその利潤率を成立させる価格および賃金率が存在するとすれば, つぎの連立方程式が成立していなければならない.

$$(7) \quad \begin{cases} (1+r)(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) + wl_1 = b_{11}p_1 + b_{12}p_2 \\ (1+r)(a_{21}p_1 + a_{22}p_2) + wl_2 = b_{21}p_1 + b_{22}p_2 \end{cases}$$

ただし, $a_{ij} \geq 0 (i, j = 1, 2)$ は第 i 生産過程に投入される第 j 商品の量, $b_{ij} \geq 0 (i, j = 1, 2)$ は第 i 生産過程で産出される第 j 商品の量, $l_i > 0 (i = 1, 2)$ は第 i 生産過程に投入される労働量, $p_i (i = 1, 2)$ は第 i 財の価格, w は賃金率, r は利潤率である. (7)式が成立しているとき, その利潤率を均等利潤率と呼ぶことにする.

賃金率を価値尺度財に取り, $\tilde{p}_i = p_i/w (i = 1, 2)$ とおき, $b_{i2} - (1+r)a_{i2} \neq 0 (i = 1, 2)$ を仮定し, (7)式より, \tilde{p}_1 を独立変数, \tilde{p}_2 を従属変数とする一次関数

$$(8) \quad \tilde{p}_2 = -\frac{b_{i1} - (1+r)a_{i1}}{b_{i2} - (1+r)a_{i2}} \tilde{p}_1 + \frac{l_i}{b_{i2} - (1+r)a_{i2}} \quad (i = 1, 2)$$

を導く. (8)式は均等利潤率で剰余生産物を生み出すことのできる価格の組合せを表している. これを均等利潤可能曲線と呼ぶことにする.²³⁾ その形は $-(b_{i1} - (1+r)a_{i1})/(b_{i2} - (1+r)a_{i2})$ および $l_i/(b_{i2} - (1+r)a_{i2})$ の値で決まるが,²⁴⁾ $l_i > 0$ であるので $b_{i1} - (1+r)a_{i1}$, $b_{i2} - (1+r)a_{i2}$ の正負によって, その形状は特徴づけられる.

そこで行列

$$M(r) = \begin{pmatrix} b_{11} - (1+r)a_{11} & b_{12} - (1+r)a_{12} \\ b_{21} - (1+r)a_{21} & b_{22} - (1+r)a_{22} \end{pmatrix}$$

を考える. $M(r)$ の (i, j) 要素は, r が与えられたとき, 第 i 生産過程で生産される第 j 財の純生産額を表しており, r -純生産行列と呼ばれる.²⁴⁾ r -純生産行列の符号パターンをもとに, (8)式の形状を考察しよう.

単一生産物体系の場合. 単一生産物体系では $b_{12} = 0$, $b_{21} = 0$ となるので, r -純生産行列の符号は

23) 以下の議論にあたっては Foley [1] を参照した.

24) r -純生産行列については Duménil, G. and Lévy, D [2] を参照.

$$M(r) = \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

となる．このとき均等利潤可能曲線の組合せは，例えば

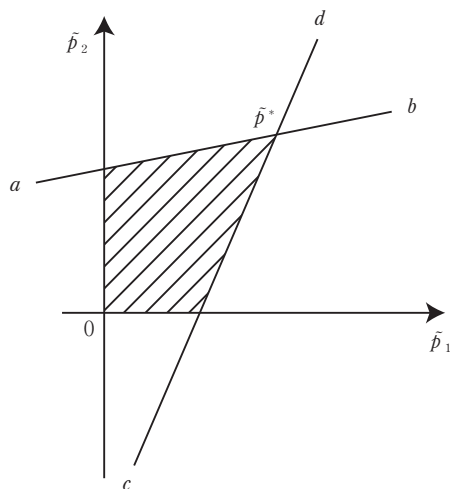


図1 単一生産物の均等利潤可能曲線

となる．第1生産部門の均等利潤可能曲線は cd ，第2生産部門のそれは ab である．

第2生産部門の均等利潤可能曲線 ab よりも下の領域では

$$(9) \quad (b_{21} - (1+r)a_{21})\tilde{p}_1 + (b_{22} - (1+r)a_{22})\tilde{p}_2 < l_2$$

となるので²⁵⁾ 均等利潤率を確保することができず，欠損が発生する．同様に，第1生産過程については cd よりも上の領域で欠損が発生する．よって図1の斜線部分は両部門でともに欠損が発生する価格ベクトルの集合を示す． \tilde{p}^* は

25) $b_{21} - (1+r)a_{21} < 0$ ， $b_{22} - (1+r)a_{22} > 0$ を念頭におけば(9)式が成立する．

2つの部門で均等利潤率を成立させる価格であり、図はこのような正の価格がただ一つ存在することを示している。²⁶⁾

結合生産物体系の場合、結合生産物体系では単一生産物体系に比べて、いろいろな符号パターンを考えることができるが、典型的な場合として

$$M(r) = \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$$

をとりあげよう。この場合、均等利潤可能曲線の組合せは図2となる。図の斜線部分は、単一生産物体系の場合と同様の理由により、両部門において欠損が発生する価格ベクトルの集合を表している。また \tilde{p}^* は2つの部門で均等利潤率が成立する価格を表す。

ここで体系の再生産の観点から均等利潤可能曲線の意味を考えよう。単一生産物体系の場合には r -純生産行列の行はすべて半正ベクトルである。よっていずれかの部門で欠損が発生し生産が行われなくなると、体系全体の再生産は不可能となる。したがって単一生産物体系においては、すべての生産部門で欠損が発生しない場合のみ、つまり図1でいえば価格が \tilde{p}^* の値をとる場合においてのみ、再生産が可能となる。しかし結合生産物体系の場合には事情が異なる。欠損が発生する部門が存在するからといって、それが直ちに体系の再生産を不可能にするわけではない。

図2を用いて説明しよう。第1生産部門の均等利潤可能曲線を ab 、第2生産部門のそれを cd とする。太線部分 \tilde{p}^*b (ただし \tilde{p}^* を除く) の価格のもとでは、第1生産部門は均等利潤率を達成することができる(与えられた利潤率で剰余生産物を生産することができる)が、第2生産部門では欠損が発生し、生産は行われない。しかし r -純生産行列の第1行は正ベクトルであるので、第2生産部門で生産が行われないからといって第1生産部門の生産に支障がで

26) 両部門で均等利潤率を成立させる価格が必ず正値であるとはかぎらない。直線 ab の傾きが直線 cd の傾きよりも大きい場合には負値となる。

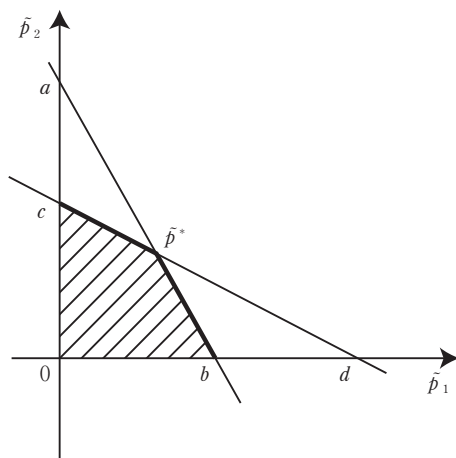


図2 結合生産物の均等利潤線

るわけではない。よって \tilde{p}^*b (ただし \tilde{p}^* を除く) の価格のもとでも体系の再生産は可能である。同様に太線部分 $c\tilde{p}^*$ (ただし \tilde{p}^* を除く) の価格のもとでは、第1生産部門で欠損が発生しているが、第2生産部門で均等利潤率を保証する剰余生産物が生産されるので、体系の再生産は維持される。2つの生産部門とともに再生産が行われるのは価格 \tilde{p}^* においてである。与えられた利潤率に対して体系の再生産を保証する価格は集合 $c\tilde{p}^*b$ となる。結合生産物体系における利潤率と価格の関係は単一生産物体系のように点对点の写像ではなく、点对集合の写像になる。

4.3 「過剰な生産体系」論の問題点

均等利潤可能曲線の議論を踏まえて、デュベルテュイ＝シンハの「過剰な生産体系」の意味を検討しよう。ここで利潤率を $r = 0.035$ とおき、この値をマナーラの数値例に当てはめ、 r -純生産行列を計算すると

$$M(0.035) = \begin{pmatrix} 0.056 & 0.0055 \\ 0.0055 & -0.044 \end{pmatrix}$$

となる。第1生産部門については、第1行が正ベクトルであるので、単独で再生産可能である。第2生産部門については、第2行が半正ベクトルであるので、第1生産部門の助けがなければ再生産は不可能である。さらに、 $l_1 = 1$, $l_2 = 0.1$ とおき、2つの生産過程とともに均等利潤率が成立する価格を計算すると、 $\tilde{p}^* \approx (18.1818 \quad -7.09885 \times 10^{-14})'$ となる。

この計算結果を踏まえると、均等利潤可能曲線の概観は

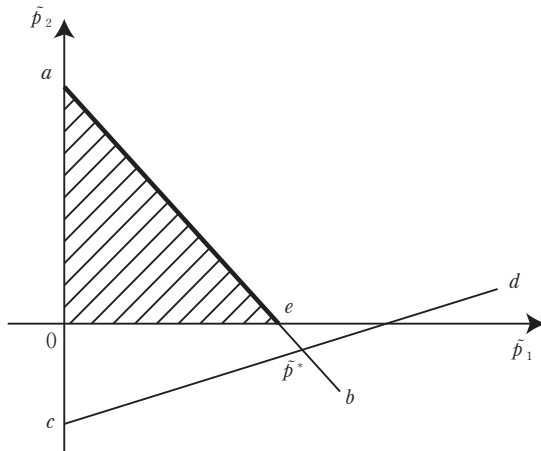


図3 均等利潤曲線の組合せ

となる。 ab は第1生産部門の均等利潤可能曲線、 cd は第2生産過程の均等利潤可能曲線である。両部門で均等利潤率を成立させる第2財の価格は $\tilde{p}_2^* = -7.09885 \times 10^{-14} < 0$ であるので、第2生産部門で生産が行われる可能性はなく、価格 ae のもとで第1生産過程においてのみ生産が行われる。以上の結果をデュベルテュイ＝シンハの言葉で表現すれば、この生産体系は「過剰生産体系」だということになる。

つぎに利潤率を $r = 0.034$ に引き下げて同様の計算を行うと

$$M(0.034) = \begin{pmatrix} 0.056 & 0.0066 \\ 0.0066 & -0.044 \end{pmatrix}$$

となる。r-純生産行列の符号パターンは同じであるので、均等利潤曲線の形状は変わらない。ここでも、 $l_1 = 1$ 、 $l_2 = 0.1$ とおき、2つの生産過程とともに均等利潤率が成立する価格を計算すると、 $\tilde{p}^* \approx (17.8101 \quad 0.398794)'$ となる。この結果を踏まえて均等利潤可能曲線の概観を描くと

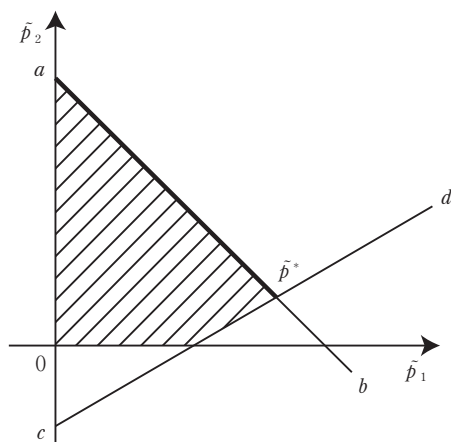


図4 均等利潤曲線の組合せ

となる。 $\tilde{p}^* > 0$ であるので、第2生産部門でも生産が可能である。つまり利潤率が $r = 0.034$ のときには、マナーラの数値例は「過剰な生産体系」ではないということになる。

利潤率の水準によって、生産体系が「過剰な生産体系」になったり、ならなかったりしたわけであるが、この事実、利潤率(=価格体系)を知ることなく経済体系が「過剰な生産体系」であるかどうかを決定することはできないということを意味している。デュペルテュイとシンハは「過剰な生産体系」とい

う基準を適用すればマナーラ問題は存在しないと主張するが、生産技術が与えられても、それが「過剰な生産体系」であるかどうかをあらかじめ確定できない以上、そうした不確かな基準を用いた議論は受け入れがたい。

5 マナーラ問題への解答

5.1 4.1の数値例の意味

デュベルテュイ＝シンハの議論を退けたので、われわれは改めてマナーラ問題への答えを考える必要がある。まず4.1の数値例に立ち返ろう。「過剰な生産体系」であっても、マナーラの数値例では固有値が複素数を取り、それを一部修正した数値例では実数をとった。この違いはどこから来るのだろうか。2つの産出行列 B_1 と B_2 は正則行列であるので、いずれも逆行列が存在する。よってこの数値例の場合、(1)式は

$$(10) \quad (1+R)(B')^{-1}A'q = q$$

と書き換えることができる。 $C_i = (B'_i)^{-1}A'_i (i=1, 2)$ とおき、 A'_1, B'_1, B'_2 を代入し、その値を求めると、

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1.16881 & 0.23951 \\ -0.23651 & 0.7333 \end{pmatrix} \not\geq 0,$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0.22202 & 0.0455 \\ 0.66259 & 0.91819 \end{pmatrix} > 0$$

となる。 C_1 は非負行列ではないが、 C_2 は正行列である。したがって、行列 C_2 にはペロン・フロベニウスの定理を適用することができるので、固有方程式は正の固有値を持つことが保証されている。それに対して C_1 は負の要素を含むのでそのような保証はない。つまり、 $(B'_i)^{-1}A'_i (i=1, 2)$ が非負行列であるかどうかで異なる結果が得られたのである。ということは $C_i = (B'_i)^{-1}A'_i$ が非負行列となる条件を示すことができれば、それがマナーラ問題への解答と

なるのではないだろうか.

ところで $(B')^{-1}A'$ が非負行列であれば, $A'q = \frac{1}{1+R}B'q$ を $(B')^{-1}A'q = \frac{1}{1+R}q$ に変形し, ペロン・フロベニウスの定理を用いて, 非負固有値 $\frac{1}{1+R}$ および非負固有ベクトル q の存在が証明される. したがって, ここで考えていることは結合生産物体系にペロン・フロベニウスの定理を適用する条件を見つけることである. このような方向にペロン・フロベニウス定理を一般化する研究はマンガサリアンが行っている.²⁷⁾ ここではそれを利用する.

5.2 ペロン・フロベニウス定理の一般化

5.2.1 定義

ペロン・フロベニウス定理の一般化にあたって, マンガサリアンは固有値, 固有ベクトルをつぎのように定義する.²⁸⁾

定義 1 (固有値). 非ゼロベクトル $x (\neq 0)$ について, $Ax = \lambda Bx$ の時, そしてその時に限り, 複素数 λ を B に関する A の固有値と呼び, x を λ に対応する B に関する A の固有ベクトルと呼ぶ. B に関する A の固有値の集合を B に関する A のスペクトルと呼び, $\text{sp}(A_B)$ と記す.

定義 2 (スペクトル半径). B に関する A のスペクトル半径を

$$\begin{aligned}\rho(A_B) &= \max_{\lambda \in \text{sp}(A_B)} |\lambda| \quad \text{if } \text{sp}(A_B) \neq \emptyset \\ &= -\infty \quad \text{if } \text{sp}(A_B) = \emptyset\end{aligned}$$

27) Mangasarian [8], Punzo [13] pp.103-105 も参照. なおマンガサリアンは矩形の実行列から出発し, 一定の条件をおくことで正方行列を導き, そのうえで一般化されたフロベニウス定理を論証しているが, 以下では最初から正方行列を対象にする.

28) Mangasarian [8], p. 88.

と定義する.²⁹⁾

■補足 うえで定義した固有値は通常の固有値とは異なるので、スペクトル半径について説明を補足しておく.³⁰⁾ 正方行列 B に関する正方行列 A のノルムを $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|Bx\|}$ と定義する. つまり $\|A\|$ は x を変化させた場合にベクトル Ax のノルムとベクトル Bx のノルムの比の上限と定義する. つぎに λ_i を B に関する A の固有値, x_i をその固有ベクトルとおく. すなわち

$$Ax_i = \lambda_i Bx_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を考える. 両辺のノルムをとると

$$\|Ax_i\| = \|\lambda_i Bx_i\| = |\lambda_i| \|Bx_i\|$$

となり, $|\lambda_i| = \frac{\|Ax_i\|}{\|Bx_i\|}$ がえられる. したがって,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|Bx\|} \geq |\lambda_i|$$

となる. ここで

$$\rho(A) = \max_{x \neq 0} |\lambda_i|$$

とおき, この $\rho(A)$ を行列 B に関する行列 A のスペクトル半径と定義する. $\|A\| \geq \rho(A)$ であるので, 半径という言葉が示すように, 固有値は半径 $\|A\|$ より遠いところには存在しない.

29) $\text{sp}(A_B) = \emptyset$ について, これは定義を完全なものにするための規定であり, 後の議論には関係しない.

30) 説明の補足にあたって, 小島紀男・矢沢志雄作・本間光一 [5] pp. 113-114 を参照した.

5.2.2 ペロン・フロベニウス定理の拡張

A, B の間につぎの双対性が存在する.³¹⁾

定理 1 (マンガサリアンの双対定理). $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とする. このとき,

$$B'y \geq 0 \Rightarrow A'y \geq 0 \Leftrightarrow \exists X \geq 0 : A = BX$$

が成立する.

証明. $B'y \geq 0 \Rightarrow A'y \geq 0$ を仮定する. このとき $-A'y > 0, B'y \geq 0$ は解をもたない. モツキンの二者択一定理³²⁾ により $-A'x_1 + B'x_2 = 0$ は解 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ をもつ. そこで $x_j^1 = (0 \cdots 0 \underset{j}{1} 0 \cdots 0)'$ ($j = 1, \cdots, n$) とおくと, $-a_{ij} + \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j^2 = 0, x_j^2 \geq 0$ ($i, j = 1, \cdots, n$) が成立する. したがって $A = BX$ となる非負行列 $X = (x_1^2 \cdots x_n^2)$ が存在する. つぎに $\exists X \geq 0 : A = BX$ を仮定する. 両辺の転置行列をとると $A' = X'B'$. 両辺に右から y を掛けると $A'y = X'B'y, B'y \geq 0$ であれば, $X' \geq 0$ であるので, $A'y \geq 0$. (証明終わり)

つぎの補題が成立する.³³⁾

補題 1. X を $A = BX$ となる $n \times n$ の実行列とする. また $r(A)$ と $r(B)$ をそれぞれ A と B の階数とする. このとき,

31) 定理の証明は Mangasarian [8] pp. 90-91 を参考にした.

32) モツキンの二者択一定理

A, B, C をそれぞれ $m_1 \times n, m_2 \times n, m_3 \times n$ 行列とする. このとき次の (a), (b) は二者択一である.

(a) $Ay > 0, By \geq 0, Cy = 0$ は解 y をもつ.

(b) $A'x_1 + B'x_2 + C'x_3 = 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ は解 x_1, x_2, x_3 をもつ.

Motzkin [10] を参照. 定理の証明は Mangasarian [9] および中山恵子 [11] も参照. ただし, ここでは $C = (\emptyset)$, すなわち C が空行列の場合を考えている.

33) Mangasarian [8], p. 89. 証明はマンガサリアンを参考にした.

$$\lambda \in \text{sp}(A_B), r(A) = n \Rightarrow \lambda \in \text{sp}(X)$$

が成立する.

証明. $A = BX$ であるので, $r(A) = n$ であれば $r(B) = n$ ³⁴⁾ $\lambda \in \text{sp}(A_B)$ であるので $Az = \lambda Bz, z \neq 0$. これを $BXz = \lambda Bz, z \neq 0$ と書き換える. $r(B) = n$ より B^{-1} が存在するので, 両辺に左から B^{-1} を掛け, $Xz = \lambda z, z \neq 0$ をえる. よって $\lambda \in \text{sp}(X)$. (証明終わり)

定理 2 (フロベニウス定理の拡張).

$B'y \geq 0 \Rightarrow A'y \geq 0$ が成立すれば, $Ax = \lambda Bx$ は実固有値 $\lambda = \rho(A_B)$ について半正の実固有ベクトル $x \geq 0$ をもつ.

証明. 定理 1 より $A = BX$ となる $X \geq 0$ が存在する. このとき, 非負行列 X にフロベニウスの定理³⁵⁾ を適用すると, スペクトル半径 $\rho(X)$ に等しい X の実固有値 λ が存在し, X に対応する半正の実固有ベクトルが存在する. すなわち $Xx = \lambda x, x \geq 0, \lambda = \rho(X) \geq 0$. 両辺に左から B を掛け, 書き換えると, $Ax = \lambda Bx, x \geq 0, \lambda \geq 0$. よって $\lambda = \rho(X) \in \text{sp}(A_B)$. 補題 1 より $\text{sp}(A_B) \subset \text{sp}(X)$ であるので, $\lambda \in \text{sp}(A_B)$. (証明終わり)

5.3 経済的意味

5.3.1 問題

結合生産体系においては単一生産物体系と違って, 実数の標準比率が必ず存

34) 証明は例えば, 佐武一郎 [14], p. 106 を参照.

35) フロベニウスの定理

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を非負行列とする. このとき, $Ax = \lambda x$ となる $x \geq 0, \lambda \geq 0$ が存在する.

在するとは限らない. これはマナーラによって初めて明らかにされた. しかし実数の標準比率が存在するためにはどのような条件を仮定すべきかについて, マナーラはなにも述べておらず, マナーラの指摘は問題提起に留まってきた. しかし定理2より, $B'y \geq 0 \Rightarrow A'y \geq 0$ であれば, 結合生産体系においても実固値, 実固有ベクトルをもつことが分かった. これはマナーラが残した問題に対する数学的な解答である. 残された問題は $B'y \geq 0 \Rightarrow A'y \geq 0$ の経済学的意味を考えることである.

5.3.2 準備

$B'y \geq 0 \Rightarrow A'y \geq 0$ の経済的意味を考えるに当たって, 必要な概念と命題を整理しておく.³⁶⁾

定義3 (凸多面錐). 有限個の点 a_1, a_2, \dots, a_k の一次結合の中で, 係数が非負であるもの

$$y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k \quad \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$$

の集合を凸多面錐という. 凸多面錐を $K[a_1, a_2, \dots, a_k]$ で表す. あるいは $A = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ とおき, $K[A]$ で表す.

定義4 (双対錐). $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき A^* を

$$A^* = \{y | (x, y) \geq 0, \text{ for all } x \in A\}$$

と定義し, A の双対錐という.³⁷⁾

36) 以下では入江昭二 [4], 小山昭雄 [6] を参考にした.

37) (x, y) は x と y の内積である.

補題 2. $K = K[a_1, a_2, \dots, a_k]$ のとき

$$y \in K^* \Leftrightarrow a'_1 y \geq 0, a'_2 y \geq 0, \dots, a'_k y \geq 0$$

証明. 任意の元 $x \in K$ をとる. 凸多面錐の定義より x は $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$, $\lambda_i \geq 0 (i = 1, \dots, k)$ と書くことができる. 双対錐の定義より $(x, y) \geq 0$. これを書き換えて $(x, y) = \lambda_1 (a_1, y) + \lambda_2 (a_2, y) + \dots + \lambda_k (a_k, y) \geq 0$. 任意の x についてこの関係が成立するためには, $y \in K^* \Leftrightarrow a'_1 y \geq 0, a'_2 y \geq 0, \dots, a'_k y \geq 0$ でなければならない. (証明終わり)

補題 3. K_1, K_2 が凸多面錐のとき

$$K_1 \subset K_2 \Rightarrow K_2^* \subset K_1^*$$

証明. 任意の $y \in K_2^*$ をとる. すべての $x \in K_2$ について $(x, y) \geq 0$ であるが, $K_1 \subset K_2$ であるので, すべての $x \in K_1$ について $(x, y) \geq 0$ となる. よって $y \in K_1^*$. (証明終わり)

5.3.3 経済的意味

$B'y \geq 0 \Rightarrow A'y \geq 0$ は, y が線形不等式体系 $B'y \geq 0$ の解であれば, y は線形不等式体系 $A'y \geq 0$ の解であるという意味である. しかしこれでは経済的意味がいま一つ明らかではない. そこで補題 3, 補題 4 を使ってつぎの命題を証明する.

定理 3.

$$K(A') \subset K(B') \Rightarrow K^*(B') \subset K^*(A')$$

証明. 補題2より $\{y | B'y \geq 0\} \Leftrightarrow y \in K^*(B')$ および $\{y | A'y \geq 0\} \Leftrightarrow y \in K^*(A')$ である. したがって $B'y \geq 0 \Rightarrow A'y \geq 0 \Leftrightarrow K^*(B') \subset K^*(A')$. 補題3より $K(A') \subset K(B') \Rightarrow K^*(B') \subset K^*(A')$ (証明終わり)

定理3を \mathbb{R}^2 の場合について図解すると

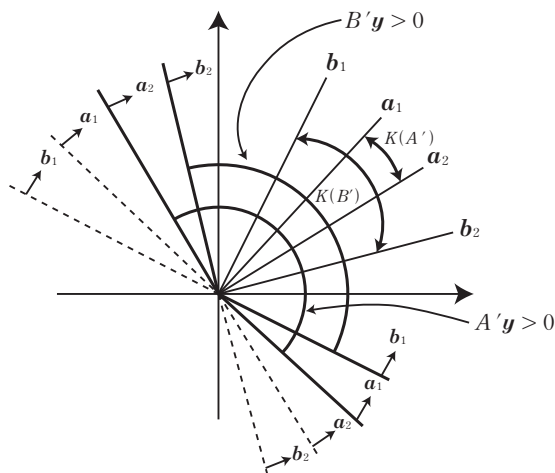


図5 経済的意味

となる.³⁸⁾

定理3より, 条件 $K(A') \subset K(B')$ は条件 $B'y \geq 0 \Rightarrow A'y \geq 0$ が成立するための十分条件である. そこで条件 $B'y \geq 0 \Rightarrow A'y \geq 0$ の代わりに, 条件 $K(A') \subset K(B')$ を考えることにする. $K(A') \subset K(B')$ ということは凸多面錐 B' のなかに凸多面錐 A' が含まれるということである.³⁹⁾ 経済学の言葉でいうと, 産出ベクトルが生成する錐体のなかに投入ベクトルが生成する錐体が含まれるということである.

つぎに, この条件の意味について考えよう. 3.2において, すべての

38) ただし図5は $K(A') \subset K(B') \Leftrightarrow K^*(B') \subset K^*(A')$ の場合を図示している.

39) 図5を参照.

$1 \leq j \leq n$ に対して

$$\sum_i a_{ij} \leq \sum_i b_{ij}$$

を定義した。これは生産体系が自己再生産的であるという条件（＝純生産可能条件）であった。生産活動が意味を持つためにはこの条件が満たされていなければならない。ここで第 i 商品の産出ベクトルを \mathbf{b}_i' 、第 i 商品の投入ベクトルを \mathbf{a}_i' 、 $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)'$ とおき、上の式を書き換えると、 $\mathbf{a}_i' \mathbf{e} \leq \mathbf{b}_i' \mathbf{e} (i = 1, \dots, n)$ となる。この式と標準比率が実数値をとる十分条件 $K(A') \subset K(B')$ を比べてみる。純生産可能条件は産出ベクトルの合計が投入ベクトルの合計よりも大であることを意味しており、一方、標準比率が実数をとるための条件は産出ベクトルを端点ベクトルとする凸多面錐のなかに投入ベクトルを端点ベクトルとする凸多面錐が含まれることを意味している。⁴⁰⁾ 2つの条件の経済的意味は類似しており、標準比率が実数をとる条件は純生産可能条件の一般化とみなすことができるであろう。

6 む す び

標準比率が虚数をとるというマナーラが示した数値例は、デュベルテュイとシンハの指摘を俟つまでもなく、適切な生産活動を示したものではない。しかしそれを理由にマナーラの指摘を無意味なものと否定することは間違っている。マナーラは結合生産体系において標準比率が実数を取るためにはどのような条件を付加すべきであるかという問題を提起したのである。本稿で、われわれは、産出ベクトルの錐体のなかに投入ベクトルの錐体が含まれるという条件を仮定するならば、標準比率が実数を取り、結合生産体系においても標準商品の理論を構成することができるということを明らかにした。

40) 図5についていえば、 \mathbf{a}_1 と \mathbf{a}_2 が $K(A')$ を生成する端点ベクトルであり、 \mathbf{b}_1 と \mathbf{b}_2 が $K(B')$ を生成する端点ベクトルである。

参 考 文 献

- [1] Foley, D. K. (1985), "On Prices of Production in a General Model of Production" *Contributions to Political Economy*, Vol. 4.
- [2] Duménil, G. and Lévy, D. (1984), "The Unifying Formalism of Domination: Value, Price, Distribution and Growth in Joint Production", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Vol. 44, No. 4.
- [3] Dupertuis, M.-S. and A. S. Sinha (2009), "Existence of the Standard System in the Multiple-Production Case: A Solution to the Manara Problem", *Metroeconomica*, Vol. 60, No. 3.
- [4] 入江昭二 (1966)『線形数学Ⅰ』共立出版.
- [5] 小島紀男・矢沢志雄作・本間光一 (1990)『工学のためのマトリクス3 マトリクスとシステム』東海大学出版会.
- [6] 小山昭雄 (1994),『経済数学教室3 線形代数と位相 (上)』岩波書店.
- [7] Manara, C. (1968), "Il Modello di Piero Sraffa per la Produzione Congiunta di Merci a Mezzo di Merci", *L'Industria*, no. 1; English translation in Pasinetti (1980).
- [8] Mangasarian, O. L. (1971), "Perron-Frobenius Properties of $Ax - \lambda Bx$ ", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 36, Issue 1.
- [9] Mangasarian, O. L. (1969), *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, (関根智明訳『非線形計画法』培風館, 1972年)
- [10] Motzkin, T. S. (1951), "Two Consequences of the Transposition Theorem on Linear Inequalities", *Econometrica*, Vol. 19, No. 2, April.
- [11] 中山恵子 (1995),『非線形計画と非線形固有値問題』勁草書房.
- [12] Pasinetti, L. L. (ed.) (1980), *Essays on the Theory of Joint Production*, London, Macmillan, (中野守・宇野立身訳『生産と分配の理論—スラッファ経済学の新展開』日本経済評論社, 1988年).
- [13] Punzo, L. F. (1980), "Economic Applications of a Generalized Perron-Frobenius Problem", *Economic Notes*, Vol. 9.
- [14] 佐武一郎 (1958),『線形代数学』裳華房.
- [15] Sinha, A. (2010), *Theories of Value from Adam Smith to Piero Sraffa*, Routledge.
- [16] Sraffa, P. (1960), *Production of Commodities by means of Commodities Prelude to a Critique of Economic Theory* Cambridge, Cambridge University Press, (菱山泉・山下博訳『商品による商品の生産—経済理論批判序説』有斐閣, 1962年).