松 山 大 学 論 集
第 22 巻 第 4 号 抜 刷
２０１０ 年 10 月 発 行

VaR と CVaR のポートフォリオ分析への適用

―― 創業板のケース ――

松 本 直 樹
陳 傑

研究ノート

VaR と CVaR のポートフォリオ分析への適用
―― 創業板のケース ――

松　本　直　樹*[1]
陳　　　　　傑*[2]

1．は　じ　め　に

2009 年 10 月 30 日に深圳証券取引所のベンチャー企業向け市場「創業板（中国版ナスダック）」が 28 銘柄を同時上場させ，取引が始まった。本稿ではこれら 28 銘柄を対象に，設立日 10 月 30 日より翌年 2010 年 2 月 26 日まで，17 週間の週足データを用いて最適ポートフォリオを組んでみる。

そもそもポートフォリオ組成の意味はリスク・マネジメントにあり，ポートフォリオ理論によって投資の際どのようにリスクをコントロールすべきか自体はすでに確定している。しかし他方でリスクの定義やリスクの定量化についてはまだまだ議論の余地がある。そこで本稿は従来型のマーコウィッツ・モデルを踏まえながらも，そこに VaR と CVaR の分析手法を取り込み，加えて先に触れた創業板のデータを用いて得られた結果をそれぞれ具体的に比較してみることにしたい。

本稿の構成は次のようである。まず，次節でポートフォリオの意味を説明す

＊1　松山大学経済学部
＊2　復旦大学数学科学学部

る。第3節ではポートフォリオの基礎理論を紹介し，第4節においてマーコウィッツ・モデルの定式化を見た上で，その問題点を指摘する。続く第5節ではVaRのアプローチを紹介し，概念をマーコウィッツ・モデルに導入する。第6節では4と5節に基づき具体的に創業板のデータを利用しながら最適ポートフォリオを求める。第7節ではVaRの問題点を指摘し，それに代えてCVaRを取り扱いながらも，同様にその手法をマーコウィッツ・モデルに導入，創業板のデータに依拠しつつ，新たに最適ポートフォリオを求め，両アプローチ間での結果を比較する。最後に全体がまとめられる。

2．ポートフォリオとは

ポートフォリオとは，本来，書類を整理し収納するためのフォルダのことである。ただその書類が何であるか，何に用いられるかによって意味合いが異なってくる。例えば学習との関連で取り上げられると，その文脈では学習者自身の経験や成果を蓄積した情報ファイルという意味になるし，逆に教師の立場からは自らの教育業績記録となる。何れにしてもポートフォリオは学習過程における個人の技能・成果などの証明のためのケースであり，当事者にとって日課や就職活動において欠かせないツールといえよう。

しかし投資関連の文脈で用いられるとなると，そこでは保有資産を収納・管理するケースの意味となり，株券や債券などの資産の内訳が念頭に置かれることになる。当然，本稿では後者の意味で用いられることになる。すなわち主たる分析対象はリスク資産である株式であり，複数の銘柄をどのように組み合わせるべきかを示す保有比率がここでの最適ポートフォリオとなる。

すべての銘柄を対象としてもよいが，通常は範囲を事前に絞り込んでおくことが多い。このことがポートフォリオ対象銘柄をどのように絞り込んでおくべきかという設定のテーマとなる。本稿でのテーマは創業板となる。ここでは創業板というテーマで絞り込んだ銘柄をどの程度の割合で保有することが合理的であるのかを吟味するわけである。さてその創業板とは昨年10月30日に中国

深圳で 28 銘柄，社総売買高 2,900 億円からスタートした。[1] その後，順調に上場企業数を増やし，2010 年 8 月には 100 社が上場し，設立 9 ヵ月で IPO 調達額 9,100 億円にまで達した。[2] 上々の滑り出しといえよう。

次節ではファンド設定の前提となるポートフォリオの基礎的な考え方を紹介し，理論面でのポイントを押さえておくことにしたい。

3．ポートフォリオ理論とは

まず，ポートフォリオという考え方は，マーコウィッツが書いた博士論文を基に発展した理論のことである。[3] 1990 年に彼はノーベル経済学賞を受賞した。この理論では分散投資がなぜ有利に働くのかを説明する。直感的にいって，分散投資をすれば，一つの銘柄だけに投資した場合と比べ，リスクが減るというのは分かる。そしてリスクが半分になれば，リターンも半分になってしまうと考えがちである。確かに分散化はリスクというデメリットを小さくするものの，同程度にリターンというメリットをも小さくしてしまうかもしれない。ところが，このマーコウィッツによる理論が説明する分散投資の本質とは，このリターンが低下する以上の低い水準にリスクを抑えることができるという，投資家にとっては好都合なパフォーマンスを得ることなのである。[4]

ポートフォリオには組入れ銘柄の単純合計ではなく，個々の諸特徴を超える何らかの効果が作用する。複数の銘柄を保有することは分散化を意味し，その代償として単一銘柄に特化させることで見込めるリターン享受の可能性を放棄しなければならない。このデメリットを補って余りある程のメリットをそこでどのようにして得るのか。これが可能となれば分散化のメリットとなる。実際，ポートフォリオのリターンは絶えず加重平均のままであるが，そのリスクは通常，加重平均より小さくなる。確かに相関係数が 1 の場合には，ポートフォリオのリスクは複数銘柄リスクの加重平均になるが，相関係数がそれを下回る場合，特にマイナスの場合には，銘柄を組み合わせることによってポートフォリオのリスクを極限まで小さくできる。このように銘柄を組み合わせることで，

一定のリターン水準を維持しながらも，全体のリスクを十分に抑え込むことをここではリスク低減効果と呼ぼう。この存在によってリターンを極力下げずにポートフォリオのリスクだけを，組入れ銘柄の何れよりも小さくすることすら可能となってくるのである。

期待リターンごとに，最も効果的な組入比率の組み合わせを作ったときのリスクとリターンの関係がポートフォリオの投資機会曲線であり，この曲線上では，組入れ比率のあらゆる組み合わせの中で，同等の期待リターンで最もリスクの小さな数値が実現される。単一銘柄に対応するリスクとリターンの単なる１次結合とはならず，リスクが低下してある程度たわんだ形となる。このたわみの存在こそが先述のリスク低減効果の作用を意味する。そして一度，このたわんだフロンティアを見出すことさえできれば，残されたなすべきことといえば，効率的フロンティアのどこに最適なポイントを確定すれば良いかだけである。

さて金融資産は株式だけではなく，他に銀行預金や MMF のような値下がりの少ない比較的安全なタイプのものもある。このような安全資産をここでは国債と考えると，その利回り（長期金利）から発する資本市場線が効率的フロンティアに接する点で危険資産間での最適ポートフォリオ（より正確には効率的ポートフォリオの中での接点ポートフォリオ）が得られることになる。

後はこのようにして決まった危険資産（株式）間の保有比率を前提に，無差別曲線の位置・形状から，資本市場線との接点で安全資産と最適危険資産ポートフォリオ間との保有比率が決定する。以上により最適ポートフォリオの完成となる。すなわちこのように安全資産が存在する場合には，接点ポートフォリオ決定のため効率的フロンティアと接する資本市場線がここでの新たな効率的フロンティアとなり，このフロンティア上で投資家の期待効用を最大化するような最適ポートフォリオが決定されることになる。

このポートフォリオ理論においては，最適な危険資産間でのポートフォリオの決定が無差別曲線の位置・形状と無関係，つまり投資家のリスクに対する態

度が独立しており，このことはトービンの分離定理として知られているものである。つまりこのことから，安全資産と複数の危険資産を同時に保有する場合の全資産すべてに関する最適ポートフォリオの決め方とは無関係に，危険資産間の選択，つまり接点ポートフォリオ（市場ポートフォリオ）の決め方を投資家の選好から分離し，独立しているものとして取り扱うことができるのである。しかしながら本稿では，危険資産としての株式間のポートフォリオのあり方に焦点を当てており，両者間で特に混乱を招く恐れがないため，敢えてこの最適ポートフォリオの名で呼ぶことにする。

4．マーコウィッツ・モデル

問題は n 個の証券が存在するものとし，そのときの最適な投資比率を決定する。そこでの定式化は以下の通りである[5]。

$$\begin{cases} \min \sigma_p^2 = X^{\mathrm{T}} \Sigma X \\ \mathrm{s.t.} \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ E(r_p) = X^{\mathrm{T}} R \end{cases}$$

where

$R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)^{\mathrm{T}}$

$R_i = E(r_i)$：第 i 証券のリターンの期待値

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$：ポートフォリオの組入れ比率

$\Sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}$：共分散

$E(r_p)$：ポートフォリオのリターンの期待値

期待リスクの最小化を目的とし，定式化の結果を図で見ると，以下のようになる（図１）。任意のリターンの下で，ポートフォリオのリスクを最小化するような構成比を求めていくことで投資機会曲線が得られ，更にその右上がり部分で効率的フロンティアが定められる。

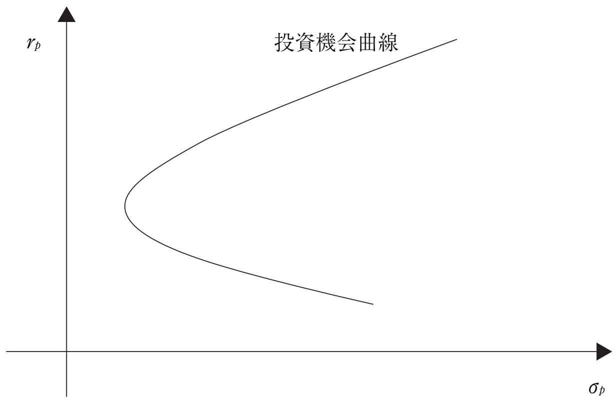

図 1

さてそもそもリスクとは不確実性のことであるが，そのマネジメントを分析の対象とするからには，何らかの形で数値化しなければならない。つまりリスクの計測である。マーコウィッツ・モデルではリターンのばらつきの程度をリスクとして捉え，分散，延いては標準偏差をもってそれに充てていた。しかしそもそも，分散や標準偏差はデータのバラツキ具合を表すものの，通常の関心事はそれらのマイナス方向への過度のブレを避けるリスク管理であり，その意味でプラスとマイナスの値には非対称性が抜き難く存在する。つまり個人であれ企業であれ，リスクの捉え方としては何らかの損失を被る将来の可能性という側面が強く，その意味では損失が発生する場合のみをリスクと定義した方がよいかもしれない。この点でマーコウィッツ・モデルの弱点を超える，より合理的なモデルを考えてみよう。

5．VaR とマーコウィッツ・モデル

まず 1 つのアプローチとしては VaR（Value at Risk）というものがある。VaR とはある一定の確率の下，金融資産あるいはポートフォリオが将来のある一時期までに被るかもしれない最大の損失額のことである。投資を行う場合，この

VaR に基づいて金融資産のリスクを評価することができる。主な応用例としてはバーゼルⅡによる銀行の自己資本比率のコントロールが挙げられる[6]。多くの金融機関が日々の業務としてこの VaR の概念を利用しながら信用リスクの管理を行っている。金融機関のみならず，企業の財務担当者や，投資顧問，年金基金のファンド・マネジャーなどによっても広く用いられるようになってきた。

VaR の定式化は以下のとおりである[7]。

$$\mathrm{Prob}(\Delta \mathrm{P} \leq -\mathrm{VaR}) = 1 - c$$

ここで Prob は確率を意味し，ΔP は金融資産価値の変化，VaR は損失額，c は確率である。これにより金融資産は c の確率の下で損失が VaR に超過しないことが保証されることになる。

更にここでもう一つ別の概念を導入しておこう。RAROC（Risk-Adjusted Return On Capital）である。RAROC はリターン/リスクと定義される。これはリターンとリスクの双方を鑑みて，そのバランスを計る尺度となる。リターンが大きいことは望ましいが，それを得る代償としてリスクがそれ以上に大きくなってしまえば投資の意味をなさない。リスクの最小化を追求するためには，リターンとリスクをそれぞれ分子と分母に取って，その下でその割合の最大化を追求することが合理的である。つまり RAROC の最大化である。ここでは VaR が金融リスクとして用いられるので，リスクに VaR を代入して

RAROC＝リターン/VaR

となる。

さて VaR の計測には３つの手法が知られている。デルタ法，ヒストリカル法，そしてモンテカルロ法である。デルタ法の前提としてはリスクが正規分布に従っていなければならず，その意味でリターン変動の分散・共分散をパラメータとするため分散共分散法とも呼ばれる。またヒストリカル法とは過去デー

タを用いるものである。つまり将来のリターンがこれまでの歴史上のパターンの中に見出されることを仮定する分析方法である。最後にモンテカルロ法はヒストリカル法の下，コンピュータ・シミュレーションを繰り返し実行して新しいランダム・リスクを生み出す分析方法である。

VaRは2つの重要なパラメータがある。1つは資産保有の期間である。通常，期間が短ければ流動性は高く，リスクは小さくなるし，長ければ流動性は低く，リスクは大きくなるはずである。2つ目は信頼区間である。ここでは確率 c に対応する。これは金融機関ごとに異なりうる。例えば，J. P. Morgan は95%を用い，Citibank は95.4%を採用している。[8]

VaRを数学的に導出してみよう。先にリターンが正規分布に従うとし，ある時点での金融資産の価値を W，その後の収益率を R，R の期待値を μ，分散を σ^2 とする。そして信頼区間 c の下で，金融資産の価値が $W^* = W(1+R^*)$ となる。但し R^* は c の下での最低の収益率であり，$\mathrm{Prob}(R \leq R^*) = 1-c$ である。

$$\mathrm{VaR} = E(W) - W^* = -W(R^* - \mu) \tag{1}$$

収益率が正規分布に従うと仮定し，α は正規分布で確率 c（分位数）に対する分位値である。

$$\frac{R^* - \mu}{\sigma} = -\alpha \Rightarrow R^* = \mu - \alpha\sigma \tag{2}$$

(2)を(1)に代入して

$$\mathrm{VaR} = E(W) - W^* = -W(\mu - \alpha\sigma - \mu) = \alpha\sigma W$$

が得られる。これは保有期間が1日のみで，信頼区間が c，リターンが正規分布に従う際のVaRの計算式である。もし保有の時間が5日間であるならば，この式に $\sqrt{5}$ を乗じ $\sqrt{5}\alpha\sigma W$ とすればよいことになる。

さてここで，マーコウィッツ・モデルにこの VaR という概念を導入してみよう。

$$\begin{cases} \min \sigma_p^2 = X^{\mathrm{T}}\Sigma X \\ \mathrm{s.t.}\ \mathrm{Prob}(r_p < -\mathrm{VaR}) \leq 1-c \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ E(r_p) = X^{\mathrm{T}}R \end{cases}$$

where

$$\mathrm{VaR} = -(E(r_p) - \Phi^{-1}(c)\sigma_p)$$

$$E(r_p) = -\mathrm{VaR} + \Phi^{-1}(c)\sigma_p$$

$\Phi(\bullet)$：正規分布の密度関数

図で表すと，以下のようである（図２）。

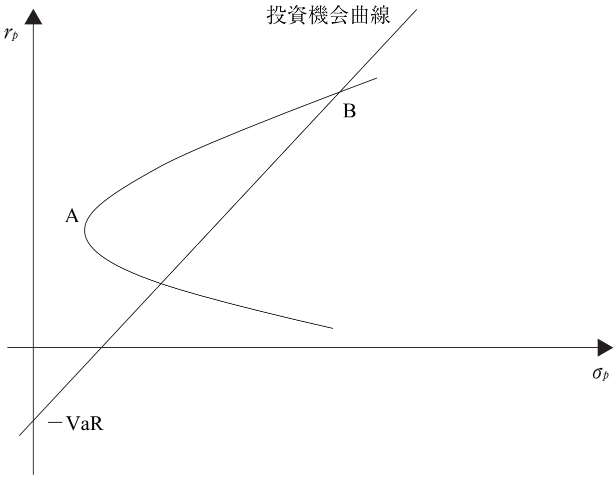

図 2

直線と直線以上の部分で表すポートフォリオであれば，そのとき確率 c の下で損失が VaR を超過しないことを保証している。そのため投資機会曲線の

うち，ここではその右上がり部分でかつ AB 間のみが効率的フロンティアとして分析対象となる。

6．VaR に基づく創業板のポートフォリオ分析

本節では第 4 節と第 5 節の議論に基づきながら，実際に創業板のデータを用いて具体的にポートフォリオを求めてみる。まず n 種の投資対象がある。記号の意味については投資額 W，信頼区間 c，正規分布で確率 c に対する分位値 α であり，更に

組入れ比率 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$x_1,x_2,\ldots,x_n\geq 0$，$\sum_{i=1}^{n} x_i=1$

$R=(R_1,R_2,\ldots,R_n)^{\mathrm{T}}$，$y_i$ ：第 i 証券の収益率

$m=(m_1,m_2,\ldots,m_n)^{\mathrm{T}}$，$m_i$ ：ポートフォリオにおける第 i 証券のヒストリカルデータに基づく平均収益率

$\Sigma=(\sigma_{ij})_{n\times n}$ ：共分散

$f(X,R)=-(x_1R_1+x_2R_2+\cdots+x_nR_n)=-X^{\mathrm{T}}R$ ：損失関数

とする。収益率は平均収益率マイナス長期金利 r と定義され，もし収益率が正規分布に従えば,

RAROC＝収益率 /VaR

where

$$\mathrm{VaR}=\alpha\times\sqrt{X^{\mathrm{T}}\Sigma X}\times w$$

$$\sigma^2(f(X,R))=X^{\mathrm{T}}\Sigma X$$

であり,

$$\mathrm{RAROC}=\frac{X^{\mathrm{T}}\times m-r}{\alpha\times\sqrt{X^{\mathrm{T}}\Sigma X}\times w}$$

となる。当然，ここでの問題はこの RAROC の最大化となる。

以上で準備が整った。当初より掲げている通り，テーマを創業板とし，そこ

で開業と同時に上場した28銘柄のみを対象にポートフォリオを作成してみる。最初に，これら28銘柄の2009年10月30日から2010年2月26日までの週足のデータから収益率を求める（表1参照）[9]。

表1

証券コード	銘　　柄	リターン	リスク
300001	青島特鋭徳電気	−0.00398	0.078352
300002	北京神州泰丘軟件	0.024929	0.088785
300003	楽普医療器械	−0.01663	0.058628
300004	南方風機	2.61E−05	0.09122
300005	北京探路者戸外用品	−0.00539	0.079449
300006	重慶莱美葯業	−0.00961	0.092086
300007	河南漢威電子	0.006462	0.122301
300008	上海佳豪船舶工程設計	0.004013	0.083259
300009	安徽安科生物工程	−0.01819	0.077434
300010	北京立思辰科技	−0.0048	0.114121
300011	北京鼎漢技術	0.010079	0.062657
300012	深圳市華測検測技術	6.3E−05	0.094953
300013	江蘇新寧現代物流	−0.00304	0.110741
300014	恵州億緯リチウム能	−0.01618	0.07492
300015	愛爾眼科医院集団	−0.00137	0.066826
300016	北京北陸葯業	−0.00696	0.093124
300017	上海網宿科技	−0.01241	0.070294
300018	武漢中元華電科技	0.003369	0.109096
300019	成都硅宝科技	0.011059	0.105231
300020	浙江銀江電子	0.01463	0.112852
300021	甘粛大禹節水	0.013458	0.135445
300022	四川吉峰農機連鎖	0.047789	0.141888
300023	西安宝徳自動化	0.00325	0.117073
300024	瀋陽新松機器人自動化	0.008932	0.088214
300025	杭州華星創業通信技術	−0.00018	0.088631
300026	天津紅日葯業	−0.00615	0.059206
300027	華誼兄弟伝媒	−0.01872	0.083491
300028	成都金亜科技	−0.01531	0.115019

ここでは収益率が正規分布に従うとすると

$$\mathrm{RAROC} = \frac{X^{\mathrm{T}} \times m - r}{\alpha \times \sqrt{X^{\mathrm{T}} \Sigma X} \times w},$$

つまり $\dfrac{X^{\mathrm{T}} \times m - r}{\sqrt{X^{\mathrm{T}} \Sigma X}}$ の最大化を実行することになる。r に対しては中国における2009年11月11日新発10年国債の利回りは3.68%であるので[10]，ここでの週次データに合わせて換算すると

$$r = \frac{3.68}{100} \times \frac{7}{365} = 0.00070575$$

となる。解くべき問題は

$$\max \frac{X^{\mathrm{T}} \times m - 0.00070575}{\sqrt{X^{\mathrm{T}} \Sigma X}}$$

$$\text{s.t. } x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

であり，最大化を実行すると結果は以下の通り。つまり $x_2 = 0.487901$，$x_{22} = 0.512099$ であり，他の26銘柄は $x_i = 0$ である。証券コード300002と300022の銘柄をそれぞれ0.487901と0.512099の比率で保有することが最適ポートフォリオとなることが示される。[11]

7．CVaR と「創業板」に対するポートフォリオ分析

前節の VaR にはいくつかの欠点がある。その中で特に重要なものは，小さな確率で発生するかもしれない大きな損失を無視していることである。[12] 危機とは予期せぬタイミングかつ規模で生じてしまう機能不全である。例えば金融危機の場合，結果，金融資産の評価の際には事前には想像し難い損失が発生するが，この種の事情は VaR の計算には反映されていない。$(1-c)$ というまれにしか生じない程度で大きな損失が生じる可能性は，多くの投資家によって本来，無視できない問題のはずである。

このことを踏まえると CVaR（Conditional Value at Risk）の概念が新たに必

要とされるようになった。CVaR は VaR に超過する損失額の期待値を計算した結果であり，$(1-c)$ の確率で生じる損失の期待値である。CVaR の定義は

$$\Delta \mathrm{P} \leq -\mathrm{VaR} \text{ のときの } \mathrm{CVaR} = -E(\Delta \mathrm{P})$$

となる。

定義上, CVaR は VaR を下回ることがないことは明らかである。そして CVaR は VaR を超過する損失額の期待値を計算するため VaR においては含まれないリスクをも反映している。もちろん VaR はすでに市民権を得ており，ある程度，金融リスク管理に役立っていることは否定できず，他方，CVaR は VaR の後発であり，必ずしも十分に認知をされてはいない。しかしながら，CVaR は VaR より合理的な概念といえ，その意味では将来の金融リスク管理の方向性を示しているのではないかと考える。

次に，CVaR の計算方法を説明しよう。CVaR については VaR の計算の上にその超過部分の期待値を計算することになる。X を実行可能の集合，R を確率変数と仮定する。R の密度関数を $p(R)$，損失関数を $f(X,R)$ とするとこの $f(X,R)$ が α 以下であるときの累積分布関数 $\Psi(X,\alpha)$ を $f(X,R)$ の確率分布関数とする。

$$\Psi(X,\alpha)=\int_{f(X,R)\leq\alpha} p(R)\,dR$$

$p(R)$ が連続であれば，$\Psi(X,\alpha)$ も連続である。信頼区間を $c(0<c<1)$ とし，VaR の定義は

$$\mathrm{VaR}_{c}(X):\alpha(X,c)=\min\{\alpha\in R;\Psi(X,\alpha)\geq c\}$$

である。CVaR は VaR の超過部分の期待値を計算すればよいので

$$\mathrm{CVaR}_{c}(X):\Phi(X)=\frac{1}{1-c}\int_{f(X,R)\geq\alpha(X,c)} f(X,R)\,p(R)\,dR$$

つまり，

$$\mathrm{CVaR}=\frac{1}{1-c}\int_{f(X,R)\geq \mathrm{VaR}} f(X,R)\,p(R)\,dR$$

である。

この CVaR の概念を早速，ポートフォリオに適用してみよう。もし収益率に q 個の可能性が存在するのであれば，それぞれ $R^1, R^2, \cdots, R^q$ と示される。次に $[i]^+$ を定義する。

$$\begin{aligned}\mathrm{CVaR}&=\frac{1}{1-c}\int_{f(X,R)\geq \mathrm{VaR}} p(R)f(X,R)\,dR\\&=\mathrm{VaR}+\frac{1}{1-c}\int_{f(X,R)\geq \mathrm{VaR}} p(R)(f(X,R)-\mathrm{VaR})\,dR\\&=\mathrm{VaR}+\frac{1}{1-c}\int[-X^{\mathrm{T}}R-\mathrm{VaR}]^+\,p(R)\,dR\\&=\mathrm{VaR}+\frac{1}{q(1-c)}\sum_{k=1}^{q}[-X^{\mathrm{T}}R^k-\mathrm{VaR}]^+\end{aligned}$$

where

$i\geq 0$, $[i]^+=i$

$i\leq 0$, $[i]^+=0$

リスクを CVaR に代入すると RAROC＝収益率 /CVaR，すなわち

$$\mathrm{RAROC}=\frac{X^{\mathrm{T}}\times m-r}{\mathrm{VaR}+\frac{1}{q(1-c)}\sum_{k=1}^{q}[-X^{\mathrm{T}}R^k-\mathrm{VaR}]^+}$$

であり，ここでの問題はこの RAROC の最大化となる。

ここで題意により先の 28 銘柄の中から任意に p 個が選ばれる。データにおいては銘柄ごとに 16 期間の収益率がある。データにより将来の収益率を代用できるものとすると，全部で 16^p の収益率の組み合わせがあることになる。すなわち，$q=16^p$ である。ポートフォリオの収益率はそれぞれ $R^1, R^2, \cdots, R^q$ と表示される。

ここでは簡単化のために分析を $p=3$ のケースに限定する。そのため全部で $16^3=4096$ の収益率の組み合わせが存在することになる。

$$\mathrm{RAROC}=\frac{X^{\mathrm{T}}\times m-r}{\mathrm{VaR}+\dfrac{1}{q(1-c)}\sum_{k=1}^{q}[-X^{\mathrm{T}}R^{k}-\mathrm{VaR}]^{+}}$$
$$=\frac{X^{\mathrm{T}}\times m-r}{\mathrm{VaR}+\dfrac{1}{4096(1-c)}\sum_{k=1}^{4096}[-X^{\mathrm{T}}R^{k}-\mathrm{VaR}]^{+}}$$

以下 $c=95\%$ を選択する。

$$4096\times(1-95\%)=204.8$$

より 4,096 個の収益率の中から小さいものから 205 番目の収益率の絶対値を VaR とする。

$$\mathrm{RAROC}=\frac{X^{\mathrm{T}}\times m-r}{\mathrm{VaR}+\dfrac{1}{205}\sum_{k=1}^{4096}[-X^{\mathrm{T}}R^{k}-\mathrm{VaR}]^{+}}$$
$$=\frac{X^{\mathrm{T}}\times m-0.00070575}{\mathrm{VaR}+\dfrac{1}{205}\sum_{k=1}^{4096}[-X^{\mathrm{T}}R^{k}-\mathrm{VaR}]^{+}}$$

問題は以下の通りである。

$$\max\ \mathrm{RAROC}=\frac{X^{\mathrm{T}}\times m-0.00070575}{\mathrm{VaR}+\dfrac{1}{205}\sum_{k=1}^{4096}[-X^{\mathrm{T}}R^{k}-\mathrm{VaR}]^{+}}$$
$$\mathrm{s.t.}\ \ x_1,x_2,\ldots,x_n\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1$$

この結果は

$$x_2=0.36,\ \ x_{11}=0.24,\ \ x_{22}=0.40$$

となる。従って証券コード 300002，300011，300022 の銘柄をそれぞれ 0.36，0.24，0.40 の比率で保有することがここでの最適ポートフォリオである。[13)]

8．ま　と　め

本稿ではポートフォリオ理論として確立したマーコウィッツ・モデルを踏まえ，VaR と CVaR の概念を導入し，更に具体的に創業板のデータを用いながら最適ポートフォリオをそれぞれ導出し，得られた結果を比較した。

ここでは VaR については RAROC の最大化問題を厳密に解いており，正確な数値計算となっている。また CVaR についても同様の分析手法を適用しているが，ただしその際に，$p=3$ のみに分析を限定した。本来であればこの点は内生化すべき問題であることは言うまでもない。今後の課題としたい。

（追記）本稿は 2009 年度教育研究助成による研究成果の一部である。

注

1）「中国版ナスダック，新市場，過熱気味の船出，総売買高，2900 億円に」『日本経済新聞』(2009 年 10 月 31 日)。

2）「中国版ナスダック，100 社上場，設立 9 ヵ月，IPO 調達額 9100 億円」『日本経済新聞』(2010 月 8 月 7 日)。

3）Markowitz, H. M. "Portfolio Selection," *Journal of Finance,* vol. 7（1952）。また H. M. マーコビッツ『ポートフォリオ選択論』鈴木雪夫訳（東洋経済新報社，1969）も参照のこと。

4）以下，ポートフォリオ理論のより具体的な説明については，松本直樹「ポートフォリオ理論と株式ポートフォリオ作成の具体例」「松山大学論集」第 21 巻第 4 号（2010）第 3 節を参照されたい。

5）一般的なポートフォリオの最小化問題は，例えば D. G. ルーエンバーガー『金融工学入門』今野浩／鈴木賢一／佐々木規雄訳（日本経済新聞社，2002）において，2 次計画問題として簡潔に説明されている。

6）この点については，青沼君明・市川伸子『EXCEL で学ぶバーゼルⅡと信用リスク評価手法』金融財政事情研究会（2008）を参照のこと。

7）VaR の定義及びその計算方法の紹介については，Jorion, P. *Value at Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk,* 3rd ed., McGraw-Hill（2007）を，Excel による適用方法については，青沼君明・村内佳子『Excel&VBR で学ぶ VaR』金融財政事情研究会（2009）をそれぞれ参照のこと。

8）この点は「中国証券市場風険分析和 VaR 模型」『証券時報』（2001 年 7 月 5 日）による。

9）データは Yahoo ! 財経（http://finance.cn.yahoo.com/）を利用している。また空売りのケースもここでは考察の対象としない。

10）この点は「10 年期国債標金利」『sina ! 財経』（http://finance.sina.com.cn/roll/20091105/08593103167.shtml）を参照のこと。

11）ここでの分析は計算結果の導出に留めている。結果に関する具体的な解釈のし方については，松本直樹「ポートフォリオ理論と株式ポートフォリオ作成の具体例」「松山大学論集」第 21 巻第 4 号（2010）を参照のこと。

12）本節の内容に関しては，Rockafellar, R. T. and S. Uryasev "Optimization of Conditional Value-at-Risk," *Journal of Risk*（1999）及び Rockafellar, R. T. and S. Uryasev "Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions," *Journal of Banking & Finance,* vol. 26（2002）を参照のこと。

13）ここでも分析は結果の導出に留まっている。解釈については，松本直樹「ポートフォリオ理論と株式ポートフォリオ作成の具体例」「松山大学論集」第 21 巻第 4 号（2010）を参照のこと。