松　山　大　学　論　集
第 21 巻 第　5　号 抜 刷
2 0 1 0 年 3 月 発 行

固定資本を含む体系における標準商品

宮　本　順　介

固定資本を含む体系における標準商品[1)]

宮　本　順　介

I　はじめに

ピエロ・スラッファは『商品による商品の生産』84 節で固定資本を含む生産体系における標準商品について次のようにいう。

> 「固定資本は『還元』にかんして取り扱いにくいのと対照的に，標準体系にはたやすく適合する。問題を簡単にするのは，耐久的用具それ自体は必ずしも負の乗数をともなわないという事情である。／耐久的用具がもし基礎材ならば，種々の経過年数からなる標本によって，標準商品のなかにしかるべき割合であらわされねばならないであろう。たとえば，３年の耐用年数をもつ機械を考察することにし，標準比率を 10 パーセントと仮定しよう。ゼロ，１，２年の経過年数の機械を用いる３つの過程は，３つの過程の生産手段総額にはいる機械が，２年経過の機械 100，１年経過の機械 110，新しい機械 121 という割合を保持するような乗数をうけとるであろう。それゆえ，年末には，生産物中に見出される各経過年数群の数は，年初に生産手段のなかに含まれていた同じ経過年数のものの数を 10 パーセントだけ超過しているであろう。／連続的な消耗の段階にある耐久的用具を用いるいくつかの過程のあいだの類似性によって，一般に，もっぱら正値をとる乗数によって標準体系を構成することが可能になるであろう。そ

1）本稿は平成 18 年度松山大学特別研究助成金の成果である。

の結果として，固定資本の存在に含まれているもの以外に結合生産の要素をなんら含まない体系は，一般にすべてが正値をとる標準商品をもつであろうし，かくてこの点で単一生産物産業の体系の単純さを再現するのである」[2]。

本稿の目的は，結合生産物を含まない固定資本体系において正の標準比率が存在し，それに対応する正の乗数が存在するという，うえで引用したスラッファの主張を証明することにある。Ⅱで流動資本が１種類という簡単なケースについて，Ⅲで流動資本が２種類というより一般的なケースについて，順を追って証明する[3]。

Ⅱ　簡単なケース

Ⅱ－1　仮　定

次の仮定をおく。

ｉ）経済には，固定資本（耐久的生産設備）を生産する部門と流動資本（原材料）を生産する部門の２つが存在する。

ii）固定資本生産部門では流動資本と労働を用いて固定資本を生産し，また流動資本生産部門では固定資本，流動資本および労働を用いて流動資本を生産する。すべての商品（流動資本および固定資本）が２つの部門で直接的または間接的に使用されており，生産体系は基礎的体系である。

iii）固定資本は複数の生産期間に亘って継続的に生産に用いられるものとする。新品固定資本を使用する生産部門では生産される流動資本に加え１年間生産に使用された古い固定資本が年末に残り，この中古固定資本は次年度の生産

2）Sraffa（1960）pp. 72-73（邦訳 121-122 ページ。／は改行，傍点は引用者）

3）この問題を取り上げた先行研究に Baldone（1980），Schefold（1980），Schefold, B.（1989），Varri（1980），Woods（1984）がある。また Abraham-Frois, G., and E. Berrebi（1979），片桐（2007）には固定資本を含む標準体系についての解説がある．スラッファの固定資本モデルの最近の研究動向を知るうえで白杉（2005）が参考になる。

に再度使用される。ただしその生産効率は年々低下し，一定の損耗度を超すと突然使用不能になるものとする。使用不能となる時期は3年目の末とする[4]。なお使用不能となった固定資本は無償で廃棄されるものとする。

iv）定常状態を仮定する。ここでいう定常状態とは，１年および２年を経過した古い固定資本が新しい固定資本と相並んで生産に利用され，そのような状態が年々繰り返されている経済のことをいう。

ｖ）固定資本を生産する生産部門を第1生産過程とよぶ。流動資本を生産する生産部門は3つの生産過程に分かれ，新品固定資本を使用する生産過程を第2生産過程，１年を経過した中古固定資本を使用する生産過程を第3生産過程，２年を経過した中古固定資本を使用する生産過程を第4生産過程とよび区別する。

vi）労働者は年末に新品固定資本と流動資本を賃金として受け取る。

vii）経済は生産方程式

$$(1+r)\mathbf{pA}+w\mathbf{l}=\mathbf{pB} \tag{1}$$

によって記述される。ここで，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & M_2^1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & M_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4^3 \end{pmatrix}$，

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & M_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_4^3 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{l}=(l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4)$，$\mathbf{p}=\left(p_1 \quad p_2 \quad p_1^2 \quad p_1^3\right)$ である。

$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{l}$ の各列は各生産過程の投入ベクトル，産出ベクトル，投入労働量をそれぞれ表している。a_{2j} $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は第 j 生産過程に投入される流動資本の量，M_2^1 は第2生産過程に投入される新しい固定資本の量，M_j^{j-1} $(j=3,\ 4)$

4）スラッファの数値列に合わせて固定資本の耐用年数を3年とした。

は第j-1生産過程で使用された後，第j生産過程に再投入される中古固定資本の量，b_{ij} $(i=1,\ 2\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は第j生産過程で産出される第i商品の量，l_j $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は第j生産過程に投入される労働量である。p_i $(i=1,\ 2)$ は第i商品の価格，p_1^j $(j=2,\ 3)$ は第$j+1$生産過程に再投入される中古の固定資本の帳簿価格，w は賃金率，r は利潤率である。

viii）体系は自己補填的状態にあり，

$$\begin{aligned} &M_2^1 \leq b_{11} \\ &\sum_{j=1}^{4} a_{2j} \leq \sum_{j=2}^{4} b_{2j} \end{aligned} \tag{2}$$

が成立しているものと仮定する。(2)式を剰余条件とよぶ。

Ⅱ－2　標準商品の理論

標準商品，標準体系および標準比率を次のように定義する[5]。現実の生産体系を出発点に，各種の商品が，生産物として保っているのと同じ割合で，その総生産手段のなかにも現れるという性質を備える仮想的な生産体系を構成する。このような生産体系のもとでは，それ自身の生産手段の総量と同じ割合で合成された同じ商品からなる商品の合成商品を構成することができる。これを標準商品と定義する。そして標準商品を生産する割合で組まれた，方程式の（ないしは産業の）組み合わせを標準体系と定義し，標準体系の生産手段に対する純生産物の比率を標準比率と定義する。固定資本の生産体系(1)式を例に挙げて説明すると

$$\mathbf{Bx}=(1+R)\mathbf{Ax} \tag{3}$$

が標準体系であり，$\mathbf{x}$ が標準商品を構成する商品の割合であり，R が標準比率となる[6]。

5）Sraffa（1960）pp. 18-21（邦訳30-34ページ）参照。

標準商品は価値尺度財であるが，価格を測定する目的で作られた価値尺度財ではない[7]。標準商品を価値尺度に取ると，そして標準商品を価値尺度に取る場合に限り，(1)式から利潤率と賃金率の関係を表す $r=R\,(1-\tilde{w})$ という単純な式を導き出すことができる[8]。一般に，多数の商品が複線的に交換される経済では，相対価格の変動を反映し，特殊な技術条件（例えば部門間の資本・労働比率が均等という条件）を仮定しない限り，こうした単純な形で賃金率と利潤率の関係を捉えることはできない。標準商品を価値尺度に取る場合には，特殊な技術条件を仮定することなく，多数財モデルをあたかも一財モデル経済であるかのように単純化し，経済の背後に潜む賃金率と利潤率の本来の関係を価格の相互依存の複雑さに邪魔されることなく取り出すことができる。これが標準商品の理論的成果である[9]。

Ⅱ－3　論　証

『商品による商品の生産』76節[10]に倣って，生産体系(1)式から中古固定資本の生産過程を取り除くことにする。(1)式の左から $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を掛けると

6）生産体系(1)式から標準体系(3)式を導くにあたり，規模に関する収穫一定を仮定していると考える向きがあるかもしれない。しかし収穫に関するいかなる法則も必要ではない。なぜなら，われわれは標準商品という架空の合成商品を構成しようとしているのだから，それがもとの生産体系から技術的に構成できるかどうかを問題にする必要はないからである。標準体系はあくまで仮想的な生産体系にすぎない。この点に関しては Sraffa（1960）p. v（邦訳 1 ページ）を参照。また松本（1989）164-166 ページも参照。

7）そのような価値尺度財が必要であればそれは任意の商品を選ぶことで用は足りる。

8）標準商品 $\mathbf{x}$ は合成商品の構成比を示しているだけであるから，その値を確定する必要がある。そのための基準に選ばれるのが標準体系の純生産物である。したがって $\tilde{w}$ は標準体系の国民所得を価値尺度財にとった実質賃金率を表わす。

9）標準商品はありのままの姿の経済を一部門の単純な経済に集計するアグリゲーターである。同様の役割を担ったものに投下労働量がある。森嶋通夫は，投下労働量とは「多数の産業（つまり，ありのままの姿のセクター）を少数の『部門』に集計するときに用いられるアグリゲーター（集計因子），あるいは集計のウェート（加重因子）」（Morishima（1973）p. 10 邦訳 13-14 ページ）である，と投下労働量の隠された機能を看破している。

10）Sraffa（1960）pp. 65-66（邦訳 108-110 ページ）。

$$(1+r)\mathbf{p}\tilde{\mathbf{A}}(r)+w\tilde{\mathbf{l}}(r)=\mathbf{p}\tilde{\mathbf{B}}(r) \tag{4}$$

ただし，

$$\tilde{\mathbf{A}}(r)=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & (1+r)^2M_2^1 & 0 & 0 \\ a_{21} & \sum_{t=2}^{4}(1+r)^{4-t}a_{2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & (1+r)M_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_4^3 & 0 & 0 \end{array}\right),\ \tilde{\mathbf{B}}(r)=\left(\begin{array}{cc|cc} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{t=2}^{4}(1+r)^{4-t}b_{2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & (1+r)^2M_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1+r)M_4^3 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$\tilde{\mathbf{l}}(r)=\left(\begin{array}{cc|cc} l_1 & \sum_{t=2}^{4}(1+r)^{4-t}l_t & 0 & 0 \end{array}\right)$ である。ここで(4)式の行列を 4 つの小行列に区分し書き直すと，

$$(1+r)\mathbf{p}\left(\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}}_{11}(r) & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{12}(r) & \mathbf{0} \end{array}\right)+w\left(\tilde{\mathbf{l}}_1(r)\,|\,\mathbf{0}\right)=\mathbf{p}\left(\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{B}}_{11}(r) & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{12}(r) & \mathbf{0} \end{array}\right) \tag{5}$$

ただし，$\tilde{\mathbf{A}}_{11}(r)=\begin{pmatrix} 0 & (1+r)^2M_2^1 \\ a_{21} & \sum_{t=2}^{4}(1+r)^{4-t}a_{2t} \end{pmatrix}$，$\tilde{\mathbf{A}}_{12}(r)=\begin{pmatrix} 0 & (1+r)M_3^2 \\ 0 & M_4^3 \end{pmatrix}$，

$\tilde{\mathbf{B}}_{11}(r)=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & \sum_{t=2}^{4}(1+r)^{4-t}b_{2t} \end{pmatrix}$，$\tilde{\mathbf{B}}_{12}(r)=\begin{pmatrix} 0 & (1+r)^2M_3^2 \\ 0 & (1+r)M_4^3 \end{pmatrix}$，

$\tilde{\mathbf{l}}_1(r)=\begin{pmatrix} l_1 & \sum_{t=2}^{4}(1+r)^{4-t}l_t \end{pmatrix}$。

ここで，$(1+r)\tilde{\mathbf{A}}_{12}(r)\equiv\tilde{\mathbf{B}}_{12}(r)$ に留意すると，(5)式は

$$(1+r)\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{A}}_{11}(r)+w\tilde{\mathbf{l}}_1(r)=\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{B}}_{11}(r) \tag{6}$$

に単純化される，ただし $\tilde{\mathbf{p}}=(p_1\quad p_2)$。

(6)式は(1)式と異なり，中古固定資本が存在せず，生産体系は流動資本と新品固定資本だけで構成されている。体系から中古固定資本が排除され，固定資本に伴う複雑さが取り除かれたので，単一生産物体系の議論を適用し，標準比率と標準商品の存在を証明することができる。[11] ただし，(6)式では生産技術が

$\tilde{\mathbf{A}}_{11}(r)$，$\tilde{\mathbf{l}}(r)$，$\tilde{\mathbf{B}}_{11}(r)$ と利潤率に依存する可変的な生産技術に変わっているので，単一生産物体系の議論をそのまま適用するというわけにはいかない。

生産体系を⑴式から⑹式に書き直したことに伴い，対象となる標準体系は⑶式から中古固定資本を排除した

$$\tilde{\mathbf{B}}_{11}(R)\tilde{\mathbf{x}} = (1+R)\tilde{\mathbf{A}}_{11}(R)\tilde{\mathbf{x}} \tag{7}$$

になる。以下では⑺式を満たす正の標準比率 R の存在を証明する。[12]

$\tilde{\mathbf{B}}_{11} \neq 0$ であるので，⑺式の左から $\tilde{\mathbf{B}}_{11}^{-1}$ を掛け，整理すると

$$\left[I-(1+R)\tilde{\mathbf{B}}_{11}^{-1}(R)\tilde{\mathbf{A}}_{11}(R)\right]\tilde{\mathbf{x}} = 0 \tag{8}$$

斉次方程式⑻が自明でない解 $\tilde{\mathbf{x}} \neq 0$ を持つためには，行列 $\tilde{\mathbf{B}}_{11}^{-1}(R)\tilde{\mathbf{A}}_{11}(R)$ の固有方程式 $\left|I-(1+R)\tilde{\mathbf{B}}_{11}^{-1}(R)\tilde{\mathbf{A}}_{11}(R)\right| = 0$ が解 R をもつことが必要かつ十分である。また経済的理由によりその解は正の実数値でなければならない。そこで，$F(R) = \left|I-(1+R)\tilde{\mathbf{B}}_{11}^{-1}(R)\tilde{\mathbf{A}}_{11}(R)\right|$ とおき，$F(R) = 0$ となる $R > 0$ の存在を証明する。

$F(R)$ を計算すると，

11）単一生産物体系における標準商品の存在証明は Newman, P.（1962）を嚆矢として多くの研究があるが，例えば宮本（1993a），宮本（1993b）を参照。

12）証明に際してはペロン・フロベニウスの定理を使うのが一般的である。しかし学説史的な興味から，以下ではまず初等的な方法で証明を試みる。スラッファによれば 84 節の原稿が完成したのは 1930 年から 1940 年代の初期にかけてということである。ペロン・フロベニウスの定理が経済研究に広く利用されるようになるのはそれよりも少し後の時代になってからであるが，スラッファ自身は 1944 年末にこの定理の証明を関数解析を専門とする著名な数学者 A. S. ビシコヴィッチから教わっている。したがってスラッファはこの定理の存在を知らずに 84 節を書き始め，一般的な証明の過程で A. S. ビシコヴィッチの助力を請うたものと推測される。こうした経緯を踏まえ，Ⅱではペロン・フロベニウス定理を用いない証明を試み，より一般的なケースを扱うⅢの証明においてペロン・フロベニウスの定理を用いることにする。

$$F(R)=\frac{1}{b_{11}\sum_{t=2}^{4}(1+R)^{4-t}b_{2t}}\left\{b_{11}\sum_{t=2}^{4}(1+R)^{4-t}b_{2t}-b_{11}\sum_{t=2}^{4}(1+R)^{5-t}a_{2t}-(1+R)^{4}M_2^1a_{21}\right\} \quad (9)$$

となる。ここで $R=0$ とおくと

$$F(0)=\frac{1}{\sum_{t=2}^{4}b_{2t}}\left\{\sum_{t=2}^{4}b_{2t}-\sum_{t=2}^{4}a_{2t}-\frac{M_2^1a_{21}}{b_{11}}\right\}<1。$$

また剰余条件(2)式より，$\sum_{t=2}^{4}b_{2t}-\sum_{t=2}^{4}a_{2t}-\frac{M_2^1a_{21}}{b_{11}}>\sum_{t=2}^{4}b_{2t}-\sum_{t=1}^{4}a_{2t}>0$ が成立しているので $F(0)>0$。よって

$$1>F(0)>0 \quad (10)$$

つぎに $F(R)$ が負値をとる $R>0$ の存在を証明する。$F(R)$ の括弧の中を

$G(R)=\left\{b_{11}\sum_{t=2}^{4}(1+R)^{4-t}b_{2t}-b_{11}\sum_{t=2}^{4}(1+R)^{5-t}a_{2t}-(1+R)^{4}M_2^1a_{21}\right\}$ とおき，整理すると

$$G(R)=(1+R)^2\{b_{11}b_{22}-(1+R)b_{11}a_{22}\}+(1+R)\{b_{11}b_{23}-(1+R)b_{11}a_{23}\}+\{b_{11}b_{24}-(1+R)b_{11}a_{24}\}-(1+R)^4M_2^1a_{21}。$$

ここで $R\geq\max\left\{\frac{b_{22}-a_{22}}{a_{22}},\ \frac{b_{23}-a_{23}}{a_{23}},\ \frac{b_{24}-a_{24}}{a_{24}}\right\}$ となる任意の R（これを $\tilde{R}$ とおく）を選べば $G(\hat{R})<0$。したがって $F(\hat{R})<0$ となる。剰余条件より $\frac{b_{2i}-a_{2i}}{a_{2i}}(i=2,\ 3,\ 4)$ の少なくとも一つは必ず正であるので，$\hat{R}>0$。したがって，$F(R)$ が連続関数であることを考え合わせて $F(R)$ のグラフを描けば図1のようになる。$F(R^*)=0$ となる $R^*>0$ が存在することが示されたので，固有方程式(9)式を満たす正の R すなわち正の標準比率が存在することが証明された。

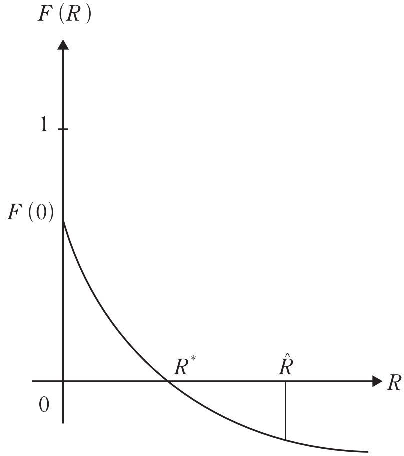

図 1

つぎに⑻式を満たす $R^{*}>0$ に対応する正の $\tilde{\mathbf{x}}$，すなわち正の標準商品が存在することを証明する。⑻式を次のように書き換える。

$$\begin{bmatrix} 1 & -\phi(R) \\ -\varphi(R) & 1-\psi(R) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}=0 \tag{11}$$

ただし，$\phi(R)=\dfrac{(1+R)^3 M_2^1}{b_{11}}$，$\varphi(R)=\dfrac{a_{21}(1+R)}{\sum_{t=2}^{4}(1+R)^{4-t}b_{2t}}$，$\psi(R)=\dfrac{\sum_{t=2}^{4}(1+R)^{5-t}a_{2t}}{\sum_{t=2}^{4}(1+R)^{4-t}b_{2t}}$。

⑾式は

$$\begin{cases} \tilde{x}_1-\phi(R^{*})\tilde{x}_2=0 & (12) \\ -\varphi(R^{*})\tilde{x}_1+(1-\psi(R^{*}))\tilde{x}_2=0 & (13) \end{cases}$$

であるので，⑿式を満たす $\tilde{x}_1^{*}>0$ および $\tilde{x}_2^{*}>\tilde{x}_1^{*}\big/\phi(R^{*})>0$ を任意に選び，⒀式に代入すると

$$-\varphi(R^*)\tilde{x}_1^*+(1-\psi(R^*))\cdot\left(\tilde{x}_1^* \big/ \phi(R^*)\right)$$

$$=\frac{\tilde{x}_1^*}{\phi(R^*)}-\{\varphi(R^*)\cdot\phi(R^*)+1-\psi(R^*)\}$$

$$=\frac{\tilde{x}_1^*}{\phi(R^*)}G(R^*)=0$$

となるので，(8)式を満たす $\tilde{\mathbf{x}}>0$ の存在が示された。

以上で，流動資本と新品固定資本だけからなる中古固定資本を除去した標準体系について，正の標準比率と正の標準商品の存在が証明された。残された問題は中古固定資本を含む標準体系(3)式について正の標準比率と正の標準商品の存在を示すことである。以下それを証明する。

(7)式の左辺を変形すると

$$\tilde{\mathbf{B}}_{11}(R)\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & 0\\ 0 & \sum_{t=2}^{4}(1+R)^{4-t}b_{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b_{11}\tilde{x}_1\\ \sum_{t=2}^{4}(1+R)^{4-t}b_{2t}\tilde{x}_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ (1+R)^2\tilde{x}_2\\ (1+R)\tilde{x}_2\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix} \tag{14}$$

となる。一方(7)式の右辺を変形すると

$$(1+R)\tilde{\mathbf{A}}_{11}(R)\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\end{pmatrix}=(1+R)\begin{pmatrix}0 & (1+R)^2M_2^1\\ a_{21} & \sum_{t=2}^{4}(1+R)^{4-t}a_{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\end{pmatrix}$$

$$=(1+R)\begin{pmatrix}(1+R)^2M_2^1\tilde{x}_2\\ a_{21}\tilde{x}_1+\sum_{t=2}^{4}(1+R)^{4-t}a_{2t}\tilde{x}_2\end{pmatrix}$$

$$=(1+R)\begin{pmatrix}0 & M_2^1 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\(1+R)^2\tilde{x}_2\\(1+R)\tilde{x}_2\\\tilde{x}_2\end{pmatrix} \tag{15}$$

となる。⑭式と⑮式より（7）式は

$$\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\(1+R)^2\tilde{x}_2\\(1+R)\tilde{x}_2\\\tilde{x}_2\end{pmatrix}$$

$$=(1+R)\begin{pmatrix}0 & M_2^1 & 0 & 0\\ a_{11} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\(1+R)^2\tilde{x}_2\\(1+R)\tilde{x}_2\\\tilde{x}_2\end{pmatrix} \tag{16}$$。

つぎに $(1+R)\tilde{\mathbf{A}}_{12}=\tilde{\mathbf{B}}_{12}$ も同様に書き換えると

$$\begin{pmatrix}0 & M_3^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & M_4^3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\(1+R)^2\tilde{x}_2\\(1+R)\tilde{x}_2\\\tilde{x}_2\end{pmatrix}$$

$$=(1+R)\begin{pmatrix}0 & 0 & M_3^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & M_4^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\(1+R)^2\tilde{x}_2\\(1+R)\tilde{x}_2\\\tilde{x}_2\end{pmatrix} \tag{17}$$。

⑯式と⑰式を合わせると

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & M_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_4^3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ (1+R)^2\tilde{x}_2 \\ (1+R)\tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = (1+R)\begin{pmatrix} 0 & M_2^1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & M_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ (1+R)^2\tilde{x}_2 \\ (1+R)\tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \quad (18)。$$

⒅式は⑶式にほかならないので，⑺式が中古固定資本を含む標準体系に同値変形されたことになる。かくて，中古固定資本を含む標準体系⑶式においても正の標準比率が存在し，またそれに対応する標準商品を構成する正の比率の存在が証明された。

$\tilde{x}_2$ を 100 そして R を 10 パーセントとおけば，標準体系⒅式より，新品固定資本と中古固定資本の比率が 100，110，121 となる。これはスラッファが 84 節で説明に使った数値例であり，数値例の適切さが確認された。

Ⅲ　一般的なケース

Ⅲ－1　はじめに

Ⅱでは，流動資本が一種類および固定資本の耐用年数が 3 年という簡単な固定資本体系について標準商品の存在を証明した。以下ではより一般的なケースについて考察する。Ⅱの議論を制約していたのは中古固定資本の耐用年数と流動資本の数である。中古固定資本の耐用年数について。中古固定資本の耐用年数については，それを 3 年から $n\,(n \geq 4)$ 年に一般化したとしても，Ⅱで示したと同様の方法で中古固定資本をいったんすべて消去し，また元に戻せばよいので，一般化に伴う新たな問題は生じない。流動資本の数について。流動資本の数を一種類から $n\,(n \geq 2)$ 種類に増やした場合，標準体系が 2 行 2 列の行列から n 行 n 列の行列になり，Ⅱで示したような初等的な方法で標準比率の正値性を証明することはできない。別の論証が必要となる。

以下では固定資本の耐用年数はⅡと同様に３年と仮定し，流動資本の数についてはそれを２種類に増やしたより一般的なケースについて正の標準比率の存在を証明する。耐用年数を３年に限定したのはうえで述べたように一般化する積極的理由がないからであり，流動資本の数を２種類としたのは，表記の錯綜を避け，論点を明確にするためである。流動資本の数を $n\,(\geq 3)$ 種類また耐用年数を $m\,(\geq 4)$ 年に一般化したとしても以下の論証はそのまま適用できる。

Ⅲ－２　仮　定

モデルの一般化に伴い仮定の一部をつぎように変更する。他の仮定はそのまま引き継ぐ。

ｉ)′経済には，固定資本（耐久的生産設備）を生産する部門が１つ，流動資本（原材料）を生産する部門が２つ，合わせて３部門が存在するものとする。

ⅱ)′固定資本生産部門では２種類の流動資本と労働を用いて固定資本が生産され，また第１流動資本生産部門では２種類の流動資本と労働を用いて流動資本が生産され，また第２流動資本生産部門では固定資本，２種類の流動資本および労働を用いて流動資本が生産されるものとする。すべての商品が３つの部門で直接的または間接的に使用されており，生産体系は基礎的体系である。

ｖ)′第１流動資本生産部門を第１生産過程とよぶ。固定資本を生産する生産部門を第２生産過程とよぶ。第２流動資本生産部門は３つの生産過程に分かれ，新品固定資本を使用する生産過程を第３生産過程，１年経過した中古固定資本を使用する生産過程を第４生産過程，２年経過した中古固定資本を使用する生産過程を第５生産過程とよび区別する。

ⅶ)′経済は生産方程式

$$(1+r)\,\mathbf{pA}+w\,\mathbf{l}=\mathbf{pB} \tag{3$'$}$$

によって記述される。ここで，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & M_3^1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & M_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_5^3 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ 0 & 0 & M_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_5^3 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{l}=(l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4 \quad l_5)$，$\mathbf{p}=(p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_3^2 \quad p_3^3)$

である。**A**，**B**，**l** の各列は各生産過程の投入ベクトル，産出ベクトル，投入労働量を表している。a_{ij} $(i=1, 3 \quad j=1, 2, 3, 4, 5)$ は第 j 生産過程に投入される第 i 流動資本の量，M_3^1 は第3生産過程に投入される新しい固定資本の量，M_j^{j-1} $(j=4, 5)$ は第 j-1 生産過程で使用された後，第 j 生産過程に再投入される中古固定資本の量，b_{ij} $(i=1, 2, 3 \quad j=1, 2, 3, 4, 5)$ は第 j 生産過程で産出される第 i 商品の量，l_j $(j=1, 2, 3, 4, 5)$ は第 j 生産過程に投入される労働量である。p_i $(i=1, 2, 3)$ は第 i 商品の価格，p_3^j $(j=2, 3)$ は第 j+2 生産過程に再投入される中古の固定資本の帳簿価格，w は賃金率，r は利潤率である。

ⅷ)′ 体系は自己補填的状態にあり，

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{5} a_{1j} \leq b_{11} \\ &M_3^1 \leq b_{22} \\ &\sum_{j=1}^{5} a_{3j} \leq \sum_{j=3}^{5} b_{3j} \end{aligned} \qquad (2)'$$

が成立しているものと仮定する。(2)′ 式を剰余条件とよぶ。

Ⅲ－3　論　証[13)]

(1)′式の左から $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を掛けて

$$(1+r)\mathbf{p}\tilde{\mathbf{A}}(r)+w\tilde{\mathbf{l}}(r)=\mathbf{p}\tilde{\mathbf{B}}(r) \tag{4$'$}$$

と書き換える。ただし，

$$\tilde{\mathbf{A}}(r)=\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & \sum_{t=3}^{5}(1+r)^{5-t}a_{1t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+r)^2 M_3^1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \sum_{t=3}^{5}(1+r)^{5-t}a_{3t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (1+r)M_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_5^3 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(r)=\left(\begin{array}{ccc|cc} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{t=3}^{5}(1+r)^{5-t}b_{3t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (1+r)^2 M_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+r)M_5^3 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$\tilde{\mathbf{l}}(r)=\left(\begin{array}{ccc|cc} l_1 & l_2 & \sum_{t=3}^{5}(1+r)^{5-t}l_t & 0 & 0 \end{array}\right)$ である。

　中古固定資本を使用する第４列と第５列の生産過程を(4)′式から除いた生産体系

$$(1+r)\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{A}}_{11}(r)+w\tilde{\mathbf{l}}_1(r)=\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{B}}_{11}(r) \tag{6$'$}$$

---

13) 以下の証明に際して，Baldone (1980)，Schefold (1980)，Schefold (1989)，Woods (1984) を参考にした。

を考えることにする。ただし，$\tilde{\mathbf{A}}_{11}(r)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \sum_{t=3}^{5}(1+r)^{5-t}a_{1t} \\ 0 & 0 & (1+r)^2 M_3^1 \\ a_{31} & a_{32} & \sum_{t=3}^{5}(1+r)^{5-t}a_{1t} \end{pmatrix}$，

$$\tilde{\mathbf{B}}_{11}(r)=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{t=3}^{5}(1+r)^{5-t}b_{3t} \end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{l}}_1(r)=\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \sum_{t=3}^{5}(1+r)^{5-t}l_t \end{pmatrix}。$$

生産方程式(6)′に対応する標準体系は

$$\tilde{\mathbf{B}}_{11}(R)\tilde{\mathbf{x}}=(1+R)\tilde{\mathbf{A}}_{11}(R)\tilde{\mathbf{x}} \tag{7$'$}$$

である。問題は(7)′式を満たす $R>0$，$\tilde{\mathbf{x}}>0$ の存在を証明することである。そのうえで中古固定資本を含む標準商品 $\mathbf{x}>0$ の存在を示す必要がある。しかし $\mathbf{x}>0$ についてはⅡと同様の手続きで導くことができるのでこれは省略する。

証明の概略はこうである。固有方程式

$$\lambda(R)\tilde{\mathbf{x}}=\overline{\mathbf{A}}(R)\tilde{\mathbf{x}} \tag{19}$$

を考える，ただし $\overline{\mathbf{A}}(R)=(1+R)\tilde{\mathbf{B}}_{11}^{-1}(R)\tilde{\mathbf{A}}_{11}(R)$，ここで $\overline{\mathbf{A}}(R)$ が分解不能行列であれば，フロベニウスの定理により，任意の R について(19)式は正の固有値 $\lambda(R)$ および正の固有ベクトル $\tilde{\mathbf{x}}(R)$ をもつ。そこでそうした正の固有値 $\lambda(R)$ のうち $\lambda(R)=1$ となる R_m の存在を証明することができれば，$\lambda(R)=1$ とおき(19)式を書き換えることで(7)′が得られるので，$R>0$ および $\tilde{\mathbf{x}}>0$ の存在が示されたことになる。

以下順を追ってこのことを証明する。$\overline{\mathbf{A}}(R)$ の成分を表記すると

$$\overline{\mathbf{A}}(R)=\begin{pmatrix} (1+r)\dfrac{a_{11}}{b_{11}} & (1+r)\dfrac{a_{12}}{b_{11}} & \dfrac{\sum_{t=3}^{5}(1+r)^{6-t}a_{1t}}{b_{11}} \\ 0 & 0 & \dfrac{(1+r)^2 M_3^1}{b_{22}} \\ \dfrac{a_{31}(1+r)}{\sum_{t=3}^{5}(1+r)^{5-t}b_{3t}} & \dfrac{a_{32}(1+r)}{\sum_{t=3}^{5}(1+r)^{5-t}b_{3t}} & \dfrac{\sum_{t=3}^{5}(1+r)^{6-t}a_{3t}}{\sum_{t=3}^{5}(1+r)^{5-t}b_{3t}} \end{pmatrix} \tag{20}$$

である。成分の配列から $\overline{\mathbf{A}}(R)$ が分解不能行列であることは直ちにわかるが，念のために証明しておく。⒇式の成分を

$$\overline{\mathbf{A}}(R)=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{32} \end{pmatrix}$$

とおく。分解不能行列はつぎのように定義される。[14] 行列 $\overline{\mathbf{A}}(R)$ の行，列の番号の集合を $N=\{1,\ 2,\ 3\}$ とおき，N が二つの空でない部分集合 L と K に分割され，$t_{ij}=0(i\in L,\ j\in K)$ が成立するとき，行列 $\overline{\mathbf{A}}(R)$ は分解可能であるといい，分解可能でないとき分解不能という。そこで $\overline{\mathbf{A}}(R)$ が分解可能と仮定し矛盾を導く。$2\in L$ とする。この時 $t_{32}\neq 0$ であるので $3\notin K$，すなわち $3\in L$。$3\in L$ であれば $t_{31}\neq 0$ であるので $1\notin K$。よって $1\in L$。$2\in L$ と仮定すれば $1,\ 2,\ 3\in L$，$K=\emptyset$ となり分解可能の仮定に矛盾するので $2\in K$ である。$2\in K$ についても同様の議論を繰り返すことで $1,\ 2,\ 3\in K$，$L=\emptyset$ が導かれ，やはり分解可能の仮定に矛盾する。$\overline{\mathbf{A}}(R)$ は L と K に分割できないことが示されたので，$\overline{\mathbf{A}}(R)$ は分解不能行列である。

つぎに $\lambda(R)=1$ となる R の存在を証明する。そのために，$\lambda(0)<1$ を証明し，ついで $R\to\infty$ であれば $\lambda(R)\to\infty$ であることを証明し，$\lambda(R)=1$ となる $R>0$ の存在を導く。

14）分解不能行列の定義は二階堂（1961）82 ページを参照。

剰余条件⑵′式を書き換えると

$$\tilde{\mathbf{A}}_{11}(0)\cdot\mathbf{1} < \tilde{\mathbf{B}}_{11}(0)\cdot\mathbf{1} \tag{21}$$

ただし，$\tilde{\mathbf{A}}_{11}(0)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \sum_{t=3}^{5} a_{1i} \\ 0 & 0 & M_3^1 \\ a_{31} & a_{32} & \sum_{t=3}^{5} a_{3i} \end{pmatrix}$，$\tilde{\mathbf{B}}_{11}(0)=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{t=3}^{5} b_{3i} \end{pmatrix}$，$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

$|\tilde{\mathbf{B}}_{11}(0)| \neq 0$ であるので，㉑の左から $\tilde{\mathbf{B}}_{11}(0)^{-1}$ を掛けて，$\tilde{\mathbf{B}}_{11}(0)^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_{11}(0)\mathbf{1} < \mathbf{1}$。さらに $\overline{\mathbf{A}}(0)=\tilde{\mathbf{B}}_{11}(0)^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_{11}(0)$ とおき，

$$\overline{\mathbf{A}}(0) < \mathbf{1} \tag{22}$$

$\lambda\left(\overline{\mathbf{A}}(0)\right)$ を $\overline{\mathbf{A}}(0)$ のフロベニウス根とし，また $\overline{\mathbf{A}}(0)$ の転置行列 $\overline{\mathbf{A}}(0)'$ のフロベニウス根を $\lambda\left(\overline{\mathbf{A}}(0)'\right)$ とすれば，$\lambda\left(\overline{\mathbf{A}}(0)\right)=\lambda\left(\overline{\mathbf{A}}(0)'\right)$[15]。$\overline{\mathbf{A}}(0)$ はうえで確認したように分解不能行列であるので，その転置行列 $\overline{\mathbf{A}}(0)'$ も分解不能行列である。したがってフロベニウスの定理より[16] $\lambda\left(\overline{\mathbf{A}}(0)'\right)\mathbf{x}'=\mathbf{x}'\overline{\mathbf{A}}(0)'$ となる正の固有行ベクトル $\mathbf{x}'>0$ が存在する。$\mathbf{x}'>0$ を㉒式の左側から掛けると，$\mathbf{x}'\overline{\mathbf{A}}(0)'\mathbf{1}=\left(\overline{\mathbf{A}}(0)'\right)\mathbf{x}'\mathbf{1}<\mathbf{x}'\mathbf{1}$。整理すると $\left(1-\lambda\left(\overline{\mathbf{A}}(0)'\right)\right)\mathbf{x}'\mathbf{1}>\mathbf{0}$。$\mathbf{x}'\mathbf{1}>\mathbf{0}$ であるので，$\lambda\left(\overline{\mathbf{A}}(0)'\right)\equiv\lambda(0)<1$。

つぎに $R\to\infty$ のとき，$\lambda(R)\to\infty$ を証明する。$R\to\infty$ とすると $\overline{\mathbf{A}}(R)$ の3行1列および3行2列はいずれも0に収束し，その他の非ゼロ成分は無限大に発散する。ここで，$\overline{\mathbf{A}}(R)$ の行和を $s_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ とすると，$r\to\infty$ であれば $s_i\to\infty(i=1,\ 2,\ 3)$。$\overline{\mathbf{A}}(R)$ が分解不能であるので，フロベニウスの定理により，

$$\min_i s_i < \lambda(R) < \max_i s_i$$

15）二階堂（1961）74 ページを参照。
16）二階堂（1961）86 ページを参照。

が成立する。[17] よって R が無限大に発散するとき $\lambda(R)$ は無限大に発散する。

$\lambda(R)=1$ となる $R>0$ の存在が示されたので，そのような R を R_m とおけば，それが標準比率となる。

Ⅳ む　す　び

スラッファは，『商品による商品の生産』84 節において，結合生産物を含まない固定資本体系においては単一生産物体系と同様に正の標準比率が存在し，それに対応する正の乗数が存在することを，論証プロセスを示すことなく主張している。本稿ではスラッファに代わって彼の主張が成立することを明らかにした。

しかしスラッファの主張が完全に証明されたというわけではない。未解決の問題が二つ残されている。一つは，固定資本体系における標準商品の存在は証明できたが，その一意性は証明されていない。複数の標準比率，複数の標準商品が存在する可能性がある。[18] いま一つは，中古固定資本は物理的原因で廃棄され，経済的理由により廃棄されることがないと仮定した。しかしこの仮定は一般的ではない。経済的理由による廃棄を仮定する必要がある。その場合には技術選択の問題が拘ってくるので議論はより複雑なものとなる。そのようなより一般化した仮定のもとでの証明は残されたままである。

参　考　文　献

Abraham-Frois, G., and E. Berrebi （1979） *Theory of Value, Prices and Accumulation, A mathematical integration of Marx, von Neumann and Sraffa*, Cambridge Univercity Press.

Baldone, S.（1980）“Fixed Capital in Sraffa’s Theoretical Scheme”, in Pasinetti, L. L.（1980）.

片桐幸雄（2007)『スラッファの謎を楽しむ－『商品による商品の生産』を読むために』，社会評論社

白杉剛（2005)『スラッファ経済学研究』ミネルヴァ書房

17）証明は二階堂（1961）88 ページを参照。

18）この点についてはバルドーネを参照。Baldone, S.（1980)pp. 120-122（邦訳 167-169 ページ）

松本有一（1989)『スラッファ体系研究序説』ミネルヴァ書房

Morishima, M.（1973）*Marx's Economics : A Dual Theory of Value and Growth*, Cambridge University Press（高須賀義博訳『マルクスの経済学－価値と成長の二重の理論』東洋経済新報社，1974年）

Pasinetti, L. L.（ed.）（1980）*Essays on the Theory of Joint Production* The Macmillan Press（中野守・宇野立身訳『生産と分配の理論　スラッファ経済学の新展開』日本経済評論社，1988年）

宮本順介（1993a)「非基礎的体系における標準商品の存在」『松山大学論集』第5巻第1号

宮本順介（1993b)「基礎的体系における標準商品の存在」『松山大学論集』第5巻第2号

Newman, P.（1962）"Review of Sraffa（1960）", *Schweizerishe Zeitschrift für Volkswirtschft und Statistik*.

二階堂副包（1961)『経済のための線型数学』培風館

Schefold, B.（1980）"Fixed Capital as a Joint Product and the Analysis of Accumulation with Different Forms of Technical Progress", in PasinettiL. L.（1980）.

Schefold, B.（1989）*Mr Sraffa on Joint Production and Other Essays*, Unwin Hyman Ltd

Sraffa, P.（1960）*Production of Commodities By Means of Commodities. Prelude to a Critique of Economic Theory*, Cambridge University Press（菱山泉・山下博訳『商品による商品の生産－経済理論批判序説』有斐閣，1962年）.

Varri, P.（1980）"Prices, Rate of Profit and Life of Machines in Sraff's Fixed-Price Model", in Pasinetti, L.L.（1980）.

Woods, J. E.（1984）"Notes on Sraffa's Fixed Capital Model", *Journal of the Australian Mathematical Society, Series B Applied Mathematics*, Vol. 26.