結合生産物体系における標準商品の存在*

宮　本　順　介

目　　次

1　はじめに
2　問題の所在
3　正の標準比率の存在
4　むすびーシェフォールトの定理との比較ー

1　は　じ　め　に

結合生産物体系のもとで標準商品の存在とその存在条件を明らかにすること，これが本論文のテーマである。2節で問題の所在を示し，3節で正の標準比率の存在条件を明らかにし，ついで存在条件の経済的意味を考察する。得られた結論はこうである。1）単一生産物体系の場合には，体系が生産的であれば標準商品は必ず存在する，しかし結合生産物体系においては体系が生産的であっても標準商品は必ず存在するわけではない。2）ただし体系が正の価格をとる場合には結合生産物体系においても標準商品は必ず存在する。

2　問　題　の　所　在

結合生産物体系の価格方程式はつぎの連立方程式によってあらわすことができる[1]。

$$\mathbf{pB} = (1+r)\,\mathbf{pA} + w\mathbf{L} \tag{1}$$

＊ 本稿は平成13年度松山大学特別研究助成金の成果である。
1）結合生産物を含む生産体系の詳細な議論は Sraffa（1960）第7章51節を参照。

ただし，$\mathbf{p}=(p_i)$　$i=1$，$\cdots n$：価格ベクトル，$\mathbf{B}=(b_{ij})$　i，$j=1$，$\cdots n$：産出行列，b_{ij}：第 j 生産過程における第 i 生産物，r：利潤率，$\mathbf{A}=(a_{ij})$ i，$j=1$，$\cdots n$：投入行列，a_{ij}：第 j 生産過程における第 i 投入物，$\mathbf{L}=(l_i)$ $i=1,\cdots n$：労働投入ベクトル，w：名目賃金率。結合生産物体系⑴を用いて標準体系を構成しよう。スラッファによると結合生産物体系の標準商品は次のように定義される。「われわれはまた，単一の生産物だけをもつ産業のばあいに行なった（33 節）のと同じ方法で，標準体系を構成することができる。すなわち，k コの生産方程式にあてはめたばあいに，その体系の総生産手段のなかでの各商品の数量が，総生産物中における同一商品の数量に対して，どの商品についても同一となるような比率を保つという結果をもたらす一組の乗数を見つけ出すことによってである。」[2]　つまり標準体系は

$$\begin{aligned}\mathbf{Bq}&=(1+R)\mathbf{Aq}\\ \mathbf{Lq}&=1\end{aligned}\tag{2}$$

となる。ここで $\mathbf{q}=(q_i)\,i=1$，$\cdots n$ は標準商品ベクトル，また R は標準比率（極大利潤率）と呼ばれる。つぎに⑵で求めた $\mathbf{q}$ を⑴の左から掛け，⑵を用いて変形すると

$$r=R\left(1-\frac{w\mathbf{Lq}}{\mathbf{pBq}-\mathbf{pAq}}\right)\tag{3}$$

となる。標準体系における純生産物すなわち $\mathbf{pBq}-\mathbf{pAq}$ をニュメレールにとり，$\mathbf{Lq}=1$ に留意すると，⑶は

$$r=R\,(1-\tilde{w})\qquad \tilde{w}=\frac{w}{\mathbf{pBq}-\mathbf{pAq}}\tag{4}$$

となり，線形の分配方程式が得られる。結合生産物を含む体系においても単一

2）Sraffa（1960），邦訳 76 ページ。

生産物体系と同様の手続きを踏むことで線形の分配関係式(4)を得ることができる。

問題は(2)を満足する $\mathbf{q} \geq 0$ および $R > 0$ が存在するかどうかである。単一生産物の場合には産出行列 $\mathbf{B}$ が単位行列となるので，標準体系は(2)ではなく

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (1+R)\mathbf{Aq} \\ \mathbf{Lq} &= 1 \end{aligned} \qquad (2)'$$

となる。(2)′ の場合にはフロベニウスの定理[3] を適用できるので $\mathbf{q} \geq 0$ および $R > 0$ が一意に存在する。しかし結合生産物体系の標準体系(2)についてはフロベニウスの定理が使えないので $\mathbf{q} \geq 0$ および $R > 0$ となる保証はない。

$\mathbf{q}$ について。標準商品ベクトル $\mathbf{q}$ の符号についてスラッファは次のように言う。「その仕事（標準体系の構成－引用者）に進むに先立って，行手に立ちふさがる若干の困難を取除いておくことが必要である。こうした困難は，相互関係の複雑性がいっそう大きいことから生ずるのであって，その結果，一方では負の数量がまぎれこむことにな」[4] ると。結合生産物を含む体系では，標準商品を構成するとき乗数（標準商品ベクトル）に負の数量が入り込む可能性があり，これは単一生産物にはない複雑さであるとスラッファは言う。そしてさらに「かような負の乗数にともなって生ずる『負の産業』にたいしては，何の意味づけも与えることはできないのであるから，これまでのところから，標準体系を現実の諸過程の考えうべき再編成として描き出すことは不可能となるという帰結が引出される。したがって，結合生産物のばあいには，適当な乗数によって変形された抽象的な方程式の体系に甘んずべきであって，それが具体的に存在するものと考えようとしてはならない」[5] と説明を続ける。ところで，スラッファのこうした説明に対して，負の数量は現実には存在しないのであるから，

3）フロベニウスの定理については以下５ページを参照。
4）Sraffa（1960），邦訳 76 ページ。
5）Sraffa（1960），邦訳 79 ページ。

現実に存在しない数量を尺度に取ることはナンセンスと考える向きがあるかもしれない。この点について一言述べておこう。標準商品は価値尺度であって，それが現実経済と一定の関係を保ってさえいれば，それが現実に存在するかどうかは問題ではない。よって標準商品に負の数量が含まれていてもそれが理由で標準商品論が破綻するわけではない。

スラッファは標準商品ベクトル $\mathbf{q}$ に負の構成要素が含まれる可能性を認め，そして負の構成要素が含まれていてもそれが議論の本質に影響を及ぼさないことを明らかにした。標準商品ベクトルの正値性問題についてはスラッファの説明で尽くされている。が，標準比率の正値性についてはどうか。この問題についてスラッファは何も述べていない。この問題を初めて取り上げたのはイタリアの数学者，カルロ・フェリーチェ・マナーラ[6)]である。マナーラは標準比率が虚数になる衝撃的な数値例を示した。標準比率が正の実数値を取る保証がなければ，分配の方程式を導出しても，それは経済的意味を持たないことになる。そこで以下では⑵を満足する正の標準比率 R が存在するかどうかを検討する。

3　正の標準比率の存在

$\mathbf{B}$ を正則行列と仮定すると，⑵は

$$\frac{1}{1+R}\mathbf{q} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{q} \tag{5}$$

となる。したがって $\mathbf{B}$ を正則と仮定することができるならば，問題は行列 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ に関する固有値問題に帰着する。固有値問題についてはつぎのフロベニウスの定理が存在する。

6）Manara（1968）を参照。

フロベニウスの定理[7)]

固有方程式 $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ において，$\mathbf{A} \geq 0$ が分解不能ならば，フロベニウス根 λ は $\lambda > 0$ となり，λ に属する正の固有ベクトル $\mathbf{x} > 0$ が存在する。しかも任意の固有ベクトルはこの $\mathbf{x}$ の定数倍になる。

フロベニウスの定理より(i) $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ が分解不能（既約）行列であり，かつ(ii) $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq 0$ のとき $R > 0$ および $\mathbf{q} \geq 0$ が存在する。ところで(5)の左から $\mathbf{A}$ を掛けると

$$\lambda\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{q} = (\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}\mathbf{q} \tag{6}$$

となる。ただし $\lambda = 1 ／ 1 + R$。(5)は(6)に変形できるので $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ 行列と $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ 行列は同じ固有値をもつことがわかる。そこで $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ 行列の固有値について調べる代わりに $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ 行列の固有値について検討する[8)]。$\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ 行列について次の定理が成立する。

定　理

$\mathbf{B}$ を正則行列とする。このとき体系 $[\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\quad \mathbf{I}]$[9)] が既約行列となるための必要十分条件は体系 $[\mathbf{A}\quad \mathbf{B}]$ が基礎的となることである[10)]。

証　明

定理の対偶を証明する。まず体系 $[\mathbf{A}\quad \mathbf{B}]$ が非基礎的であると仮定する。このとき $\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ は適当な置換行列 $\mathbf{T}$ およびマラーナの行列 $\mathbf{M}$ を用いてそれ

7）フロベニウスの定理の証明については二階堂（1961）74 ページおよび小山昭雄（1994）350 ページを参照。
8）以下の議論は Abraham-Frois G., Berrebi E.（1976）pp. 71-77 による。
9）体系 $[\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\quad \mathbf{I}]$ とは投入行列を $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ とし産出行列を $\mathbf{I}$（単位行列）とする生産体系のことである。体系 $[\mathbf{A}\quad \mathbf{B}]$ についても同様。
10）結合生産物体系における基礎的・非基礎的の区別と行列の既約・可約および階数の関係については宮本（1993）を参照。

それ下三角行列 $\mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{M}$ と $\mathbf{TBT}^{-1}\mathbf{M}$ に変形することができる。ここで，

$$[\mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{M}][\mathbf{TBT}^{-1}\mathbf{M}]^{-1} = \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{MM}^{-1}\mathbf{TB}^{-1}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{TAB}^{-1}\mathbf{T}^{-1}$$

となるが，下三角行列同士の積は下三角行列となるので，$\mathbf{AB}^{-1}$ は行と列を適当に入れ替えることによって下三角行列に変形することができる。またそうした入れ替えによって産出行列 $\mathbf{I}$ が $\mathbf{TIT}^{-1} = \mathbf{I}$ となるので，体系 $[\mathbf{AB}^{-1}\quad \mathbf{I}]$ は可約行列となる。つぎに体系 $[\mathbf{AB}^{-1}\quad \mathbf{I}]$ が可約行列であると仮定する。このとき，適当な置換行列 $\mathbf{T}$ が存在し，$\mathbf{TAB}^{-1}\mathbf{T}^{-1}$ は下三角行列となる。ここで $n > m$ とし $(\mathbf{TAB}^{-1}\mathbf{T}^{-1})_1^1$ を $(n-m)$ 次の正方行列，$(\mathbf{TAB}^{-1}\mathbf{T}^{-1})_1^2$ を $(n-m)\times m$ 行列，$(\mathbf{TAB}^{-1}\mathbf{T}^{-1})_2^2$ を m 次の正方行列とすると，

$$\mathbf{TAB}^{-1}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{TAB}^{-1}\mathbf{T}^{-1})_1^1 & (\mathbf{TAB}^{-1}\mathbf{T}^{-1})_1^2 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{TAB}^{-1}\mathbf{T}^{-1})_2^2 \end{bmatrix}$$

と書くことができる。ただし $\mathbf{0}$ は $m\times(n-m)$ の零行列。つぎに $2m\times m$ の行列

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (\mathbf{TAB}^{-1}\mathbf{T}^{-1})_2^2 \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

を考える。ただし $\mathbf{I}_m$ は m 次の単位行列。$\mathbf{D}$ の階数は m。一方 $[\mathbf{A}\quad \mathbf{B}]$ を置換行列 $\mathbf{T}$ を使って行と列を入れ換えると，置換された体系 $[\mathbf{A}\quad \mathbf{B}]$ の階数が m であることが $\mathrm{rank}\ \mathbf{D} = m$ よりわかる。したがって $[\mathbf{A}\quad \mathbf{B}]$ は非基礎的である。

証明終わり

かくて体系 $[\mathbf{AB}^{-1}\quad \mathbf{I}]$ が既約行列であるか可約行列であるかは，体系 $[\mathbf{A}\quad \mathbf{B}]$ が基礎的であるか非基礎的であるかに対応しているので，以下では体系 $[\mathbf{A}\quad \mathbf{B}]$ が基礎的である場合と非基礎的である場合に分けて正の標準比率の存在を検討する。

1）体系 $[\mathbf{A}\quad \mathbf{B}]$ が基礎的でかつ $\mathbf{AB}^{-1} \geq 0$ の場合。この場合には，フロベ

ニウスの定理を適用できるので固有方程式(6)は正の固有値を持ち，同時に固有方程式(5)も正の固有値を持つ。すなわち正の極大利潤率 $R>0$ が存在する。またフロベニウスの定理により正の固有ベクトル $\mathbf{Aq}>0$ は定数倍を除いて一意に存在する。したがって $\mathbf{q}$ も一意に存在する。しかし $\mathbf{Aq}>0$ であっても $\mathbf{q}$ が半正であるかどうかはわからない。したがって，スラッファが指摘しているように,標準商品のなかに負の要素が存在する可能性を排除することはできない。

2）体系 $[\mathbf{A}\quad\mathbf{B}]$ が基礎的でかつ $\mathbf{AB}^{-1}\ngeq 0$ の場合。この場合 λ は必ずしも実数であるとはかぎらない。マナーラはつぎの数値例をあげて固有値が虚数になる可能性を指摘した。体系 $[\mathbf{A}\quad\mathbf{B}]$ がつぎの値をとるものとする。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1.1\\ 1.1 & 1\end{bmatrix}\qquad\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1.09 & 1.144\\ 1.144 & 0.99\end{bmatrix}$$

このとき

$$\mathbf{AB}^{-1}=\begin{pmatrix}1.1688 & -0.23950\\ 0.23950 & 0.73333\end{pmatrix}\ngeq 0$$

が成立しているので，マナーラの数値例はケース2)に該当する。この生産体系は基礎的であり，また

$$[\mathbf{B}-\mathbf{A}]\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=(0.134\quad 0.034)>0$$

であるので生産的でもある。しかし，固有値を計算すると，$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{AB}^{-1}|=0$ の根は $\lambda=1.04\pm 0.1091091i$ となり虚数となる。固有値が複素数を取るということは,標準比率も複素数になるので，そうした標準比率に経済的な意味はない。

3）体系 $[\mathbf{A}\quad\mathbf{B}]$ が非基礎的体系である場合。この場合には，基礎的体系 $[\overline{\mathbf{A}}\quad\overline{\mathbf{B}}](m\times m\ ;\ m<n)$ を構成する必要がある。ただし $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ は非負行列とはかぎらない。$\overline{\mathbf{A}}\geq 0$ かつ $\overline{\mathbf{B}}\geq 0$ の場合には $\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}}^{-1}\geq 0$ となるので，1)の場合に

帰着する。$\overline{\mathbf{A}} \ngeq 0$ かつ $\overline{\mathbf{B}} \ngeq 0$ またはいずれか一方が非負でない場合については，実数の標準比率が存在しないケースを排除できない。

まとめると，体系 $[\mathbf{A} \quad \mathbf{B}]$ が基礎的であり，かつ $\mathbf{AB}^{-1} \geq 0$ である場合には必ず正の標準比率が存在するので，結合生産体系においても(4)式で表される線形の分配方程式を導出することができる。しかし，体系が基礎的であっても $\mathbf{AB}^{-1} \ngeq 0$ である場合には標準比率が虚数をとる可能性があるので，線形の分配関係を導出したとしてもそれは経済的意味をもたない場合がありうる。

これまでの議論から結合生産体系において経済的に意味のある標準比率が存在するかどうかは体系 $[\mathbf{A} \quad \mathbf{B}]$ が基礎的でかつ $\mathbf{AB}^{-1} \geq 0$ が成立するかどうかにかかっていることがわかった。ところでわれわれは宮本（1990）の中で結合生産体系における価格の正値条件としてこれらの条件を取り上げた。関連する部分を要約すると次のようになる。$\mathbf{B}$ を正則行列と仮定すると，(1)は

$$\mathbf{p} = (1+r)\mathbf{pAB}^{-1} + w\mathbf{LB}^{-1} \tag{7}$$

となる。ここで，(7)の価格ベクトル $\mathbf{p}$ が半正値となる条件は次の3つである。すなわち，1）$\mathbf{LB}^{-1} \geq 0$，2）$\mathbf{AB}^{-1} \geq 0$，3）$\mathbf{AB}^{-1}$ は既約行列，である。
以上より，正の標準比率が存在するための条件は実は価格が正値を取るための条件でもあることがわかる。

4　むすびーシェフォールトの定理との比較ー

前節の議論より，結合生産物体系における標準商品の存在は価格の正値性と不可分の関係にあることがわかった。つまり価格が正値をとる結合生産物体系においては標準商品論が成立するということである。ところで，価格の正値性と標準商品の存在について，シェフォールトが次の定理を証明している。

シェフォールトの定理[11)]

体系 $[\mathbf{A} \quad \mathbf{B}]$ は基礎的であり，かつ $\mathbf{A} \geq 0$，$\mathbf{B} \geq 0$ と仮定する。このとき正の

標準比率が存在する，すなわち標準体系が存在するか，そうでなければすべての正の利潤率にたいして任意の標準で表された価格は正値をとることができない。

証　明

$\mathbf{p}(r)=l\,[\mathbf{B}-(1+r)\mathbf{A}]^{-1}\geq 0$ と仮定する。任意の $r\,(r\geq r_0>0)$ に対して，$|\mathbf{B}-(1+r)\mathbf{A}|\neq 0$ である。$\mathrm{e}=(1,\cdots,1)$ とおけば，$\mathbf{eA}>0$ とおくことができる。また産出物を $\mathbf{eB}=\mathbf{e}$ と基準化する。つぎに $\mathbf{e}(\mathbf{B}-\mathbf{A})\geq 0$ であるので，$\mathbf{eA}=\gamma\mathbf{e}+\mathbf{f}$，$\mathbf{f}\geq 0$，$0<\gamma<1$ と書くことができる。ここで，$r\geq r_0\geq 0$ であるすべての r について，$\mathbf{Bp}(r)-(1+r)\mathbf{Ap}(r)=\mathbf{l}$。左から $\mathbf{e}$ を乗じ，整理すると $\mathbf{eBp}(r)-(1+r)\mathbf{eAp}(r)=\mathbf{ep}(r)-(1+r)\gamma\mathbf{ep}(r)-(1+r)\mathbf{fp}(r)=\mathbf{ep}(r)[1-(1+r)\gamma]-(1+r)\mathbf{fp}(r)=\mathbf{el}=1$ となる。ここで，$\mathbf{ep}(r)$ と $\mathbf{fp}(r)$ はすべての r について正であるので，もし $r>(1/\gamma)-1$ であれば，左辺は負となり，価格方程式が成立しない。したがって，$\mathbf{p}(r)\geq 0$ と $r>(1/\gamma)-1$ の 2 つの仮定はその両方またはいずれか一方が誤りであるということ，すなわち，価格が非負であるということと極大利潤率（標準比率）が存在しないということは二者択一的である。

証明終わり

シェフォールトはこの定理を証明し，「標準商品の存在しない体系においてはいかなる利潤率のもとでも価格は非負となりえない」[12)] と主張する。

結合生産物を含む体系においては体系が生産的であっても標準体系は必ず存在するわけではない，しかし価格が正値をとる場合には標準体系は必ず一意に存在する，これが本稿で得た結論であった。得られた結論はシェフォールトの定理と同じものである。2 つを比較すると，シェフォールトの証明が問題の本質を捉えた簡潔，明瞭なものであるのに対して，われわれの議論は回りくどい

11）Schefold（1989），p. 85 参照。
12）Schefold（1989），p. 85.

ものであった。ただし，直截的でない部分それだけわれわれは経済的意味に配慮した議論を行ったのではないかと考えている。

（2005 年 3 月 31 日）

参　考　文　献

Abraham-Frois, G. and Berrebi, E. (1976), *Theory of Value, Prices and Accumulation,* Cambridge University Press

Abraham-Frois, G. and Berrebi, E. (1997), *Prices, profits and rhythms of accumulation,* Cambridge University Press

Manara, C. F. (1968), "Il modello di Sraffa per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci", *L'industria* no. 1 pp. 3-18, in Pasinetti ed. (1980)

Pasinetti, L. L. ed. (1980), *Essays on the Theory of Joint Production,* Columbia U. P. (中野守・宇野立身訳『生産と分配の理論－スラッファ経済学の新展開』日本経済評論社 1988 年)

Schefold, B. (1989), *Mr Sraffa on Joint Production and Other Essays,* Unwin Hyman

Sraffa, P. (1960), *Production of Commodities by Means of Commodities : Prelude to a Critique of Economic Theory,* Cambridge U. P. (菱山泉・山下博訳『商品による商品の生産－経済理論批判序説－』有斐閣，昭和 37 年)

小山昭雄（1994）『経済数学教室 4 線型代数と位相（下）』岩波書店

宮本順介（1990），「スラッファ結合生産体系における価格の解法について」『松山大学（大学昇格）40 周年記念論文集』，平成 2 年 12 月

宮本順介（1993）「基礎的体系と非基礎的体系－ 2 つの定義について－」『松山大学論集』第 5 巻　第 3 号

二階堂副包（1961），『経済のための線型数学』培風館，昭和 36 年