# ゲーム理論における不確実性の取り扱い方(1)

## ――定和ゲームにおける混合戦略――

松　本　直　樹

### 序

プレイヤー間で利害が真っ向から対立し，そのため相互に相手を出し抜く必要性が生じているゲーム的状況下においては，通常の手続き通りにナッシュ均衡を求めようとしても，解を求めることはできない。この場合には，混合戦略まで考察の対象を広げ，各プレイヤーの戦略が確率的に決まるものと見なすことによって，ナッシュ均衡を得ることが可能となる。そこではプレイヤーの戦略を，常にどれか１つだけを確実に採用するというように限定的な意味には捉えず，戦略を複数の選択肢の中から非負の確率で採用するというように解釈する。本稿では以下，戦略の解釈の幅をこのような意味で拡張し，不確実性を新たに均衡概念に取り込んだ混合戦略という考え方を俎上に上すことにする。その後，この混合戦略を応用例として幾つかのケースに適用する。そして最後にこの議論を進化ゲームと関連づけ，より掘り下げていく。

### 1．ゲーム理論とナッシュ均衡

ゲーム理論では自分の決定が他者へ，他者の決定が自分へと，それぞれ影響し合う相互依存関係が分析対象となる。そのような状況下では，他者の決定に関する何等かの予想なしには自己の意思決定すら覚束無いであろう。このようであるにも拘わらず，どのようにして外的な強制を伴わずに，個々人が独自の判断で意思決定を行い，そしてゲームの参加者間に内生的な拘束力を合意とし

て引き出しうるのか，ということが問題となる。

以上を分析するために為されるべきことは，ゲーム的状況の正確な表現である。つまり任意のゲームが分析可能であるためにはそのゲームのルール（構造）がまず明確に規定されていなければならないのである。ゲームに参加する全員がそのルールについて正確な情報を持っていることを，ゲームのルールが共有知識となっているといい，その状況下でのゲームは完備情報ゲームと呼ばれる。その表現方法には2通りある。戦略型ゲームと展開型ゲームである。

プレイヤーとしては誰がいるのか，プレイヤーが持つ戦略には何があるのか，対応する利得は幾らなのか，という3つの要素から構成されるものが所謂利得表であり，それらを用いて戦略が同時決定される状況を表現・分析しようとする，これが戦略型ゲームの特徴である。他方これら3つの要素に加え，行動決定の順序やその際に利用可能な情報についても明示的に扱うために，ツールとしてゲームの樹を用いてゲーム的状況を表現するものが，展開型ゲームの特徴である。

展開型ゲームでは，誰が，いつ，どのような順序で，そのときどのような情報を持って，行動を決定しようとするのか，をゲームの樹によって記述できるのに対し，戦略型ゲームにおける利得表では，行動決定時点で他のプレイヤーの決定を知らないような状況（同時決定）をそもそも念頭に置いて作成されており，展開型ゲームにおいては当然明示されるべき時間の経過やその情報構造がそこでは圧縮され簡略化される。

シンプルな構造を持つこの戦略型ゲームを用いることで，それぞれ特徴的な幾つかのゲーム的状況を設定できる。そこでのゲームを解く上でも，キーとなってくる最重要概念の1つがナッシュ均衡である。以下で取り上げるこの種のゲームにおいては，簡単化のためにプレイヤー数は2人，戦略の選択肢は定義を除いて原則2つとする。このナッシュ均衡とは自らの最適反応戦略と相手のそれとの戦略同士の組合せ $(s_i^*, s_j^*)$ を意味し，ここでは

$$U_i(s_i^*,\ s_j^*) \geqq U_i(s_i,\ s_j^*) \text{ for all } i \text{ and all } s_i \in S_i,\ j \neq i,\ \ i,\ j = \mathrm{A},\ \mathrm{B}$$

のように定義される[1]。この均衡においては，まず相手プレイヤーの戦略を予想し，そのときの自己の最適反応戦略を正に相手が予想しており，それに対する相手の最適反応戦略が正しくちょうど当初の自らが予想した相手の戦略になっている。この状況とは，両者共に予想が整合的で矛盾がないものであり，従って共に自らの相手に対する予想とそれに応じた戦略の選択を，その均衡から自らの意思で変更するインセンティブを持たないケースである。その意味で自己充足的予想と自己拘束的合意が実現されており，安定的な均衡成立の状態といえる。

上記のナッシュ均衡の定義は，そもそも戦略という概念を複数の選択肢の中からある１つを選び取る意思決定の問題として形作られたものである[2]。しかしこの概念を更に拡張し，その戦略の選択に関する不確実性を均衡概念に取り込むことにしたい。そうすることでコントロールの対象を，複数の選択肢の中から選択される各戦略に対する頻度が付与された確率分布として捉え直してみよう。このように戦略を確定的なものと見なさずに，選択肢からの意思決定をミックスさせるという確率的ランダム化の手法を混合戦略と呼ぶ。他方，これと区別するために，これまで考えてきた確定的な戦略を純粋戦略と呼ぶことにする。このような工夫により，純粋戦略をある行動を100％の確率で取るものとし，混合戦略の特殊ケースとして位置付けることもできるようになる。

この混合戦略の概念が特に意味を持つのは，通常，純粋戦略としてのナッシュ均衡が見出せないケースが現実に多々起こりうるからである[3]。つまりナッシュ均衡は必ずしも常に存在する訳ではない。

## ２．コイン合わせゲームと混合戦略

例えばコイン合わせとして知られるゼロ和ゲームを考えてみよう。この表１のケースでは上記の定義を満たし得ず，その意味でそこにはナッシュ均衡が存

**表1**

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | 表 | 裏 |
| A | 表 | －1，1 | 1，－1 |
| | 裏 | 1，－1 | －1，1 |

在しないことになってしまう。このゲームでは次のような状況が想定されている。まず2人のプレイヤーが1枚のコインを手に握っており，それを同時に開いて相手プレイヤーに見せる。結局，それぞれ表と裏の2つの選択肢を持つことになり，組合せには計4通りがある。その組合せ如何でプレイヤーの利得が確定する。もし2枚のコインの表裏が共に一致していればプレイヤーAの負け，Bの勝ちとなり，そのときBはAのコインを獲得できる。他方，表裏が一致していなければAの勝ち，Bの負けで，そのときはAはBのコインを貰うことになる。

先に触れたように，従来の定義のままではどのような戦略の組合せを考えてみても決してナッシュ均衡の定義を満たすことはない。Aが表を選ぶのであればBも表を選ぼうとするが，Bが表を選ぶのであればAは裏を選ぼうとし，Aが裏を選ぶのであればBも裏を選ぼうとする。そしてBが裏を選ぶのであれば，最初に戻ってやはりAは表を選ぼうとするはずである。ここではこのように堂々巡りを招いてしまい，結局4つのどの組合せもナッシュ均衡の条件を満たし得ないのである。他者のマイナスは自分のプラスとなり，各プレイヤーは常に相手の不利になる戦略を選ぼうとするため，純粋戦略の枠組みだけでは，共に逸脱するインセンティブを持たないような安定的な組合せを見出し難いからである。

混合戦略まで考慮したときであれば，ナッシュ均衡 $(\mathbf{p}_i^*,\ \mathbf{p}_j^*)$ の定義は以下のように改められる。

$$E_i(\mathbf{p}_i^*,\ \mathbf{p}_j^*) \geqq E_i(\mathbf{p}_i,\ \mathbf{p}_j^*) \text{ for all } i \text{ and all } p_i,\ \ j \neq i,\ i,\ j = \mathrm{A},\ \mathrm{B}$$

$$\text{where } E_i(\mathbf{p}_i,\ \mathbf{p}_j) = \Sigma\Sigma p_{ig} p_{jh} U_i(s_{ig},\ s_{jh}),\ \Sigma p_{ig} = \Sigma p_{jh} = 1,$$

$$1 \geqq p_{ig},\ p_{jh} \geqq 0$$

これを先の純粋戦略ナッシュ均衡と比較してみられたい。ここでは各プレイヤーは純粋戦略 $s_{ig}$ に割り振られる確率 $p_{ig}$ を決定すると考えている。混合戦略はその確率ベクトルである確率分布 $\mathbf{p}_i$ によって表される。その結果，純粋戦略のみのケースとまったく同様にして，依然として両者間における最適反応戦略の組合せとして定義されてはいるが，ここでは各プレイヤーによる確定的な純粋戦略の採用に代えて，純粋戦略間での確率的選択という混合戦略こそが，他のプレイヤーによる同じく混合戦略への最適反応になっている。当然，純粋戦略に割り振られる確率ベクトルが確率分布となるため，その選択肢を表す $g$，$h$ の数について和を取ったものは1でなければならない。

早速，表1のゲームにこの定義を適用してみよう。[4] コイン合わせゲームはそもそも共に表裏という2つの選択肢しか持たない。そのためAが確率ベクトル $\mathbf{p}_{\mathrm{A}} = (p_{\mathrm{A1}},\ p_{\mathrm{A2}}) = (p_{\mathrm{A1}},\ 1 - p_{\mathrm{A1}})$ where $1 \geqq p_{\mathrm{A1}} \geqq 0$，Bが確率ベクトル $\mathbf{p}_{\mathrm{B}} = (p_{\mathrm{B1}},\ p_{\mathrm{B2}}) = (p_{\mathrm{B1}},\ 1 - p_{\mathrm{B1}})$ where $1 \geqq p_{\mathrm{B1}} \geqq 0$ との混合戦略を取ることになると，純粋戦略は僅か2つであるにも拘わらず混合戦略を考慮することによってその選択肢の数は飛躍的に増大し，事実上無限となる。このことがゼロ和ゲームにおいても均衡を見出しうる理由となっている。このとき両者にとっての最大化の対象となる期待利得を定式化して，それぞれ最適反応戦略を導出する。その後，その組合せとして混合戦略ナッシュ均衡を求めてみる。[5] 但し，ここでは誤解を招く恐れがほぼないため，添え字の1は省略される。

まずAの期待利得は

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{A}} &= p_{\mathrm{A}} p_{\mathrm{B}} \cdot (-1) + p_{\mathrm{A}}(1 - p_{\mathrm{B}}) \cdot 1 + (1 - p_{\mathrm{A}}) p_{\mathrm{B}} \cdot 1 + (1 - p_{\mathrm{A}})(1 - p_{\mathrm{B}}) \cdot (-1) \\ &= 2p_{\mathrm{A}}(1 - 2p_{\mathrm{B}}) + 2p_{\mathrm{B}} - 1, \end{aligned}$$

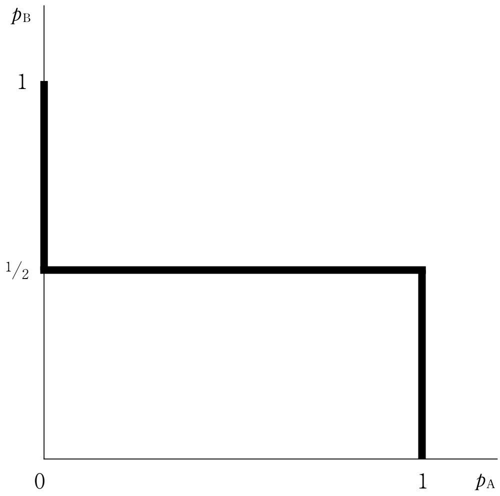


**図 1**

となり，Ａは最大化プレイヤーとしてＢによる $p_B$ の値を与えられたものとし $p_A$ をコントロールする。従ってそこでのＡの最適反応戦略は

$$1-2p_B\begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0 \Leftrightarrow p_B\begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 1/2 \Rightarrow p_A=\begin{cases} 1 \\ \text{a11}\ \ p_A \quad (1 \geqq p_A \geqq 0) \\ 0 \end{cases}$$

である。$p_B < 1/2$ であれば，$p_A = 1$ として確定的に表を選ぶ。逆に $p_A > 1/2$ であれば，$p_A = 0$ として確定的に裏を選ぶ。ちょうど $p_B = 1/2$ の際には $p_A$ の如何に拠らずＡの期待利得は $2p_B - 1$ であり，すべての戦略間で無差別となる。以上をまとめて $p_B$ に対する $p_A$ の最適反応は図 1 のようである。

他方，Ｂについてその期待利得は

$$\begin{aligned} E_B &= p_A p_B \cdot 1 + p_A(1-p_B)\cdot(-1) + (1-p_A)p_B\cdot(-1) + (1-p_A)(1-p_B)\cdot 1 \\ &= 2p_B(2p_A-1)+1-2p_A \end{aligned}$$

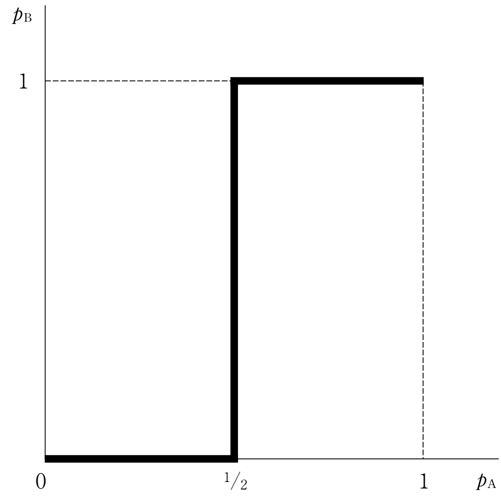


図 2

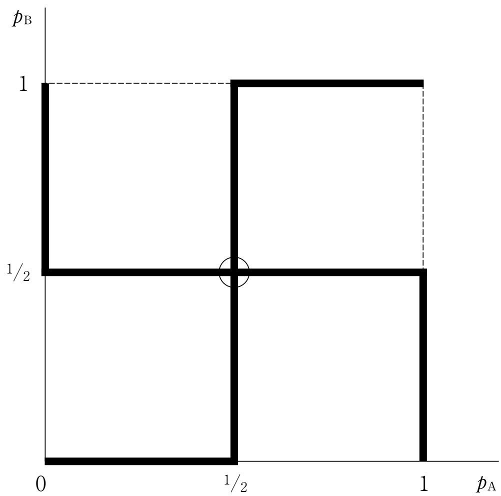


図 3

である。BはAによる $p_A$ の値を与えられたものとして $p_B$ をコントロールして期待利得は最大化する。従ってBの最適反応戦略は

$$2p_A - 1 \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0 \Leftrightarrow p_A \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 1/2 \Rightarrow p_B = \begin{cases} 1 \\ \text{a11}\ \ p_B \quad (1 \geqq p_B \geqq 0) \\ 0 \end{cases}$$

となる。$p_A > 1/2$ であれば，$p_B = 1$ として確定的に表を選ぶ。逆に $p_A < 1/2$ であれば，$p_B = 0$ として確定的に裏を選ぶ。ちょうど $p_A = 1/2$ の際には $p_A$ の如何に拠らずBの期待利得は $1-2p_A$ であり，やはりすべての戦略間で無差別となる。$p_A$ に対する $p_B$ の最適反応は図 2 のように示される。

図 1 と 2 を重ね合わせれば，その組合せとして混合戦略を考慮したときのナッシュ均衡が,図 3 において示される交点 $(p_A , p_B)=(1/2 , 1/2)$ となり，そこでは均衡期待利得がゼロ和 $(0 , 0)$ であることも容易に求まる。

## 3．予測不可能性と混合戦略の意味付け

ここで若干の注意点を指摘しておく。それは混合戦略ナッシュ均衡の成立時には，純粋戦略に固執することは許されないことである。仮に相手を出し抜き遣り込める自信があったとしても，もはやランダム化を避けて通ることは如何なる意味においても正当化できない。

確かに既に確認したように，一旦相手プレイヤーによる混合戦略の採用となった暁には如何なる戦略（純粋戦略・混合戦略を含めて）も期待利得は同一となってしまう。従って利得上では必ずしも混合戦略にこだわる必要はないことになる。例えばAが表を選べば，Aの期待利得は

$$-p_B + (1-p_B) = 1-2p_B,$$

裏を選べば

$$p_B - (1-p_B) = 2p_B - 1$$

となる。$p_B = 1/2$ のときにのみ両者の利得が一致し，そこでは 0 になる。Bが混合戦略 $p_B = 1/2$ を採用するとき，Aはどのように対処しようともこの同

一の期待利得を得ることしかできない。他方，Ｂが表を選べばＢの期待利得は

$$p_{\mathrm{A}}-(1-p_{\mathrm{A}})=2p_{\mathrm{A}}-1,$$

裏を選べば

$$-p_{\mathrm{A}}+(1-p_{\mathrm{A}})=1-2p_{\mathrm{A}}$$

となる。やはり $p_{\mathrm{A}}=1/2$ においてのみ両者の利得が一致し，０となる。Ａが混合戦略 $p_{\mathrm{A}}=1/2$ を採用するとき，ＢはＡと同様，何をしようともこの同一の期待利得を得ることしかできないのである。

しかしだからといって，もしＢがそのＡによる変更に対応して前提となっていた混合戦略から一方的に離脱すると，翻ってＡの方も混合戦略を採用するインセンティブを失ってしまう。逆もまた同様である。一方が混合戦略採用を怠れば，他方もまた混合戦略から容易に離反しようとするであろう。相手プレイヤーによる混合戦略には自らも積極的に混合戦略で応えることがなければ，混合戦略均衡はナッシュ均衡として成立し得ず，崩壊してしまうのである。

結局，相手プレイヤーに混合戦略を採用させたければ自らがそれを採用する他はない。このようなケースでは事前に各プレイヤーが互いにどのような行動を取り合うかを確定的に予測できないことになる。混合戦略を考慮したときのナッシュ均衡はＢによる $p_{\mathrm{B}}=1/2$ という混合戦略に対してＡは混合戦略 $p_{\mathrm{A}}=1/2$ で反応し，Ａによる $p_{\mathrm{A}}=1/2$ に対してＢは $p_{\mathrm{B}}=1/2$ で反応することになる。相手の合理性を前提にする限り，確率的にはもはやこれ以上相手を出し抜くことはできない。またこれにより少なくとも相手には絶対的に有利な手を作り出せないよう強いているともいえる。ただ単に偶然に身を任せればよいというものではなく，選択のパターン化を避け，生じる確率が合理的にコントロールされている。互いがこのように相手を出し抜くことができないと悟り合っているときに，意図的に予測不可能性を作り出し，その結果としてナッシュ均衡が混合戦略の範囲の中で見出されることになる[6]。

## 4．テニス：サーバーとレシーバー間での駆け引き

戦略的思考の理解を深めるために，他により具体的な例を挙げてこの混合戦略という概念の扱い方と意味付けを見てみよう。特にスポーツを題材としたものとしては，サッカーの PK 戦におけるキッカーとキーパー間での駆け引きや，野球のピッチャーとバッター間での駆け引き等,[7] ゲーム的状況のバリエーションには事欠かないが，ここでは特にテニスのサーブ時におけるサーバーとレシーバー間での駆け引きの問題を取り上げ，これを混合戦略の視点から詳細に分析してみることにしよう。[8]

このテニス競技における一場面がゲーム的状況として成り立っていることを確認しておく。状況はこうである。まずサーバーがレシーバーと1対1の状況でサーブを打つ。そのときにレシーバーはサーブが打たれた後でそのボールの方向を見極めてから動き出したのでは十分にリターンの対応はできないはずである。そこで少しでもレシーブの成功率を高められるよう，予めサーブの方向を予測し，サーブと同時にその予測に応じたストロークの動きを開始する。しかし予測が外れていればリターンの成功率は低いものとなる。もし以上の想定が該当していれば，プレイヤー間で戦略がほぼ同時決定されており，状況を戦略型ゲームと見なしてもよいことになる。

若干の補足として以下の点に留意されたい。ここでは単純化のためフォールトの可能性は考慮に入れない。つまりボールはサービスコートを外れることはないものとする。またレシーバーは必ずどちらかのコースに山を張るものとし，中途半端な対応はしないものとする。更にダブルスを想定することも許容されうるかもしれないが，ここでは状況をシングルスに限定している。また混乱を招くことのないようにプレイヤーは両者共に右利きとし，最後にサーブは右サイドから為されるものとしておこう。

### 4.1　ケースⅠ

このような想定の下，いまプレイヤーＡがサーブを打ち，そしてプレイヤーＢがサーブを受けようとしている。この後者のレシーバーＢはフォアハンド・ストロークがやや得意であり，そのため事前にサーバーＡによるフォア狙いを確実に読んでさえいればレシーブの成功率を60%（サーブの成功率は40%）とすることができる。しかしその得意なフォアハンドも当初にバックハンドを予測していたときには虚を突かれた形となり，レシーブの成功率は30%（サーブの成功率は70%）と大きく低下する。他方，このＢはバックハンド処理を不得意としており，的確にＡによるバック狙いのサーブを読み切っていたとしてもレシーブの成功率は高々40%（サーブの成功率は60%）である。ましてやフォア狙いであると予測していたのにも拘わらず，その裏をかかれた場合にはリターンの成功率は10%（サーブ成功率は90%）と急落してしまう[9]。以上の関係は表２のようにまとめられる。

**表２**

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | フォア | バック |
| A | フォア | 0.4，0.6 | 0.7，0.3 |
| | バック | 0.9，0.1 | 0.6，0.4 |

さてここで問題なのはＢにとってバックが弱点であるということだけではない。もしそれだけならばＡはＢによるバックハンド処理のみを常に強いるよう生真面目にセンター狙いを続ければよいことになる。それに対応してＢは自然とＡのバック狙いを期待に織り込んで，毎回速やかにバックハンド・ストロークに移れるよう準備を整えることになろう。その結果，サーブの成功率は60%となる。しかしこのようなやり方はＡにとって下策であり，決して適切な戦術とはいえないであろう。確かにＢは仮にサーブのコースを読み切っていたとしてもバックハンドの処理を苦手にしている。しかしそれだけでなく真に問題なのは，裏をかかれたときにこそ，そのバックハンドを最も苦にしているという

ことである。数値で言えばＢはＡによるバック狙いの予測を外したときにリターン成功率は30％であるのに対し，フォア狙いの読みを外したときにはリターン成功率は僅か10％にまで落ち込んでしまう。

ここで議論の振り出しに戻ってＡはサーブのセンター狙いを多用しＢの苦手なバックハンド処理を強いたとしよう。そのときサーブ成功率は先の通り60％である。しかしこのように遮二無二バック狙いを継続するのはナンセンスであることにやがて気付くであろう。Ｂがそれに釣られて意識をセンター側に向け始めたら，透かさずワイド狙いに切り替えたとき成功率は70％となるからである。更にこれに懲りてＢがワイド狙いを警戒し始めたら，今度は裏をかきバック狙いに戦術を切り替えるであろう。このときサーブ成功率は90％に跳ね上がる。

お気付きの通り，このゲームも既に確認済みのコイン合わせゲームと同様の構造を持っており，堂々巡りの状況を招いてしまう。ここでも利害が100％対立するので，やはり混合戦略を考慮することなくしてはナッシュ均衡を導くことは不可能である。Ａはフォアへバックへとランダムにコースを打ち分けることによりサーブの成功率を高（リターンの成功率を低）めようとし，他方でＢはフォアとバックのコースの読みをランダム化することでリターンの成功率を高（サーブの成功率を低）めようとする。このようにして相反する両者の間で折り合いを付けねばならない。取り扱い方は既に知っている。第２節と同様にして，サーバーによるフォア狙いに付与される確率は $p_{A1}=p_A$，バック狙いに付与される確率は $p_{A2}=1-p_A$ とする。レシーバーによるフォアハンドの読みに付与される確率は $p_{B1}=p_B$，バックハンドの読みに付与される確率は $p_{B2}=1-p_B$ とする。このようにプレイヤー間に予測不可能性を導入し，そこにおいてナッシュ均衡を求めればよいのである。

先のコイン合わせゲームと照らし合わせつつ同様の処置を施すと，次の通りである。Ａが確率ベクトル $\mathbf{p}_A=(p_A,\ 1-p_A)$　where $1 \geqq p_A \geqq 0$，Ｂが確率ベクトル $\mathbf{p}_B=(p_B,\ 1-p_B)$　where $1 \geqq p_B \geqq 0$ との混合戦略を取ったときの両者

の期待利得を求め，それぞれ対応する最適反応戦略を導出し，その組合せとしてのナッシュ均衡を得る。

まずここでのAの期待利得は

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{A}} &= p_{\mathrm{A}}p_{\mathrm{B}}\cdot 0.4 + p_{\mathrm{A}}(1-p_{\mathrm{B}})\cdot 0.7 + (1-p_{\mathrm{A}})p_{\mathrm{B}}\cdot 0.9 + (1-p_{\mathrm{A}})(1-p_{\mathrm{B}})\cdot 0.6 \\ &= 0.1p_{\mathrm{A}}(1-6p_{\mathrm{B}}) + 0.3p_{\mathrm{B}} + 0.6\ , \end{aligned}$$

となる。AはBによる $p_{\mathrm{B}}$ の値を所与として $p_{\mathrm{A}}$ を操作する。最適反応戦略は

$$1-6p_{\mathrm{B}}\left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} 0 \Leftrightarrow p_{\mathrm{B}}\left\{\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}\right\} 1/6 \Rightarrow p_{\mathrm{A}} = \begin{cases} 1 \\ \mathrm{a11}\ \ p_{\mathrm{A}} \quad (1 \geqq p_{\mathrm{A}} \geqq 0) \\ 0 \end{cases}$$

のようにまとめられる。$p_{\mathrm{B}} < 1/6$ であれば，Aは $p_{\mathrm{A}} = 1$ としてフォア狙いに徹する。逆に $p_{\mathrm{B}} > 1/6$ であれば，$p_{\mathrm{A}} = 0$ としてフォア狙いを取り止めバック狙いに徹すればよいことになる。ちょうど $p_{\mathrm{B}} = 1/6$ の際には $p_{\mathrm{A}}$ の如何に拠らずAの期待利得は $0.3p_B + 0.6$ である。この対応関係は図4に示される通りと

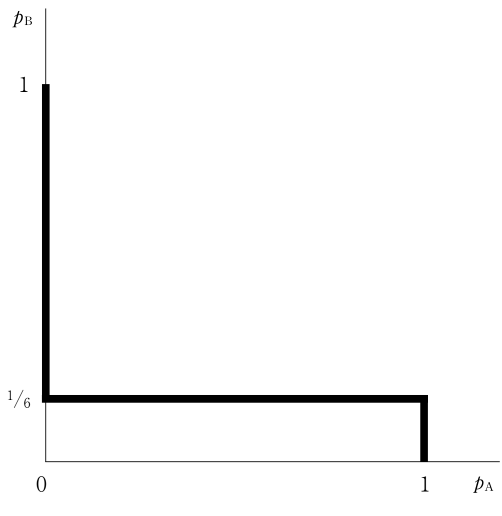


**図4**

なる。

他方，Bの期待利得は

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{B}} &= p_{\mathrm{A}} p_{\mathrm{B}} \cdot 0.6 + p_{\mathrm{A}}(1-p_{\mathrm{B}}) \cdot 0.3 + (1-p_{\mathrm{A}}) p_{\mathrm{B}} \cdot 0.1 + (1-p_{\mathrm{A}})(1-p_{\mathrm{B}}) \cdot 0.4 \\
&= 0.3 p_{\mathrm{B}}(2p_{\mathrm{A}}-1) + 0.4 - 0.1 p_{\mathrm{A}}
\end{aligned}
$$

である。BはAによる $p_{\mathrm{A}}$ の値を所与として $p_{\mathrm{B}}$ を操作する。最適反応戦略は

$$
2p_{\mathrm{A}}-1 \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0 \Leftrightarrow p_{\mathrm{A}} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 1/2 \Rightarrow p_{\mathrm{B}} = \begin{cases} 1 \\ \text{all } p_{\mathrm{B}} \quad (1 \geqq p_{\mathrm{B}} \geqq 0) \\ 0 \end{cases}
$$

である。$p_{\mathrm{A}} > 1/2$ であれば，Bは $p_{\mathrm{B}} = 1$ として読みをフォア狙いに絞る。逆に $p_{\mathrm{B}} < 1/2$ であれば，$p_{\mathrm{A}} = 0$ として読みをバック狙いに絞ればよい。ちょうど $p_{\mathrm{A}} = 1/2$ の際には $p_{\mathrm{B}}$ の如何に拠らずBの期待利得は $0.4 - 0.1p_{\mathrm{A}}$ である。この対応関係は図5で次のようにまとめられる。そして両図を重ね合わせればその組合せとして混合戦略を考慮したときのナッシュ均衡は図6において両者の

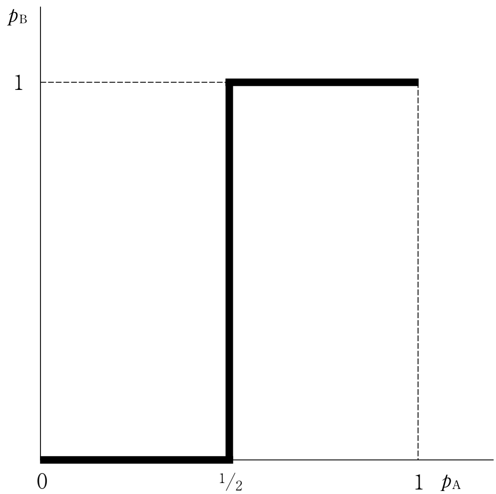


**図5**

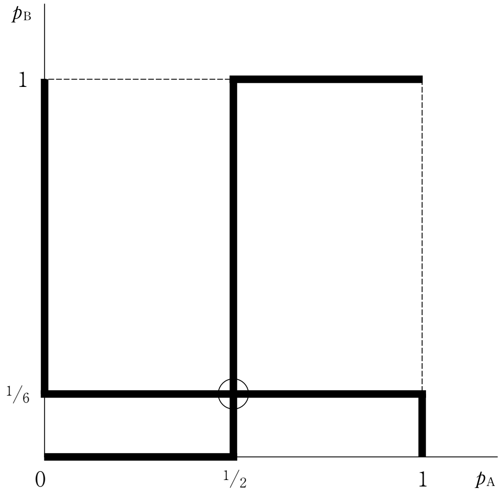


**図 6**

最適反応の交点により $(p_A, p_B) = (1/2, 1/6)$，均衡期待利得は (13/20，7/20) となっていることが確かめられる。サーバーとしてＡはＢのフォアハンド側とバックハンド側に半々の割合でサーブのコース打ち分けを行う。レシーバーとしてＢはフォアハンド側に1/6，バックハンド側に5/6の割合でサーブを予想し身構えることになる。

さて最後に，サーバーのＡはなぜＢの不得意なバックハンド側をもっと狙わないのか，という至極尤もな疑問をここで１つ提起してみよう。実はこの問いに対する解答についてはもう既に部分的には触れている。Ｂはバックハンド処理が苦手というよりも，フォアハンド側を予想しているときに虚を突かれてバックハンド側を攻められることをより苦にしているのであった。従ってＡはＢに読まれて打ち返されることを覚悟の上で，意図的にフォアハンドの得意なＢに対し有利となるサーブのワイド狙いの割合を増やし，Ｂの意識をフォアハンド側へと誘導し，逆にセンターへの意識を薄れさせるよう仕向けているのである。確かにＢの得意なフォアハンドの出番を増やせばある程度リターンされ

るリスクを高めてしまう。Aはその代償を，Bの不意を突くことによりそのバックハンド処理の不手際を際立たせることによって十分に補っているのである。この戦術の正当性は，単純にセンター狙いを続けたときのサーブの成功率については60%であったものが，ここでは65%(13/20) に高まっていることから十分に是認されうるであろう。これが先の疑問に対するここでのより正確な解答となる。

## 4.2　ケースⅡ

さてここでレシーバーBのスキルに一部変化が生じたとしよう。今やBはワイド側におけるフォアハンドの予測の裏をかかれたとしても，ある程度バックハンドの対応ができるようになった。このため表3のように数値が変更される。そこではリターンの成功率が10%から20%に高まり，他方でサーブの成功率が90%から80%に低まる。この点の変更を除いて，他の点での想定はケースⅠから不変のまま維持される。従ってやはりここでも利害が100%対立する堂々巡りの状況は基本的には変わらず，混合戦略を考慮しなければナッシュ均衡を見出すことはできない。

**表3**

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | フォア | バック |
| A | フォア | 0.4，0.6 | 0.7，0.3 |
| | バック | 0.8，0.2 | 0.6，0.4 |

Aはフォアとバックにランダムにコースを打ち分けることによりサーブの成功率を高（リターンの成功率を低）めようとし，他方でBはフォアとバックのコースの読みをランダム化することでリターンの成功率を高（サーブの成功率を低）めようとする。この点は先のケースと同様である。そしてやはりサーバーによるフォア狙いの確率は $p_A$，バック狙いの確率は $1-p_A$ であり，レシーバーのフォアハンドを読む確率は $p_B$，バックハンドを読む確率は $1-p_B$ であ

る。このとき実際にナッシュ均衡を求めてみる。Bのスキルの変化がA，Bのプレイ・スタイルにどのような影響を及ぼすのであろうか。

そこでAが確率ベクトル $\mathbf{p}_{\mathrm{A}}=(p_{\mathrm{A}},\ 1-p_{\mathrm{A}})$　where $1 \geqq p_{\mathrm{A}} \geqq 0$，Bが確率ベクトル $\mathbf{p}_{\mathrm{B}}=(p_{\mathrm{B}},\ 1-p_{\mathrm{B}})$ where $1 \geqq p_{\mathrm{B}} \geqq 0$ との混合戦略を取ったときの両者の期待利得を求め，対応する最適反応戦略を導出し，その組合せとしてナッシュ均衡を求める。

まずAの期待利得は

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{A}} &= p_{\mathrm{A}}p_{\mathrm{B}}\cdot 0.4+p_{\mathrm{A}}(1-p_{\mathrm{B}})\cdot 0.7+(1-p_{\mathrm{A}})p_{\mathrm{B}}\cdot 0.8+(1-p_{\mathrm{A}})(1-p_{\mathrm{B}})\cdot 0.6 \\ &= 0.1p_{\mathrm{A}}(1-5p_{\mathrm{B}})+0.2p_{\mathrm{B}}+0.6 \end{aligned}$$

となる。Aは $p_B$ の値を所与として $p_{\mathrm{A}}$ を操作する。最適反応戦略は

$$1-5p_{\mathrm{B}}\left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} 0 \Leftrightarrow p_{\mathrm{B}}\left\{\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}\right\} 1/5 \Rightarrow p_{\mathrm{A}}=\begin{cases} 1 \\ \text{all}\ \ p_{\mathrm{A}} \quad (1 \geqq p_{\mathrm{A}} \geqq 0) \\ 0 \end{cases}$$

である。$p_{\mathrm{B}}<1/5$ であれば，Aは $p_{\mathrm{A}}=1$ としてフォア狙いに徹する。逆に $p_{\mathrm{B}}>1/5$ であれば，$p_{\mathrm{A}}=0$ としてバック狙いに徹する。ちょうど $p_{\mathrm{B}}=1/5$ の際には $p_{\mathrm{A}}$ の如何に拠らずAの期待利得は $0.2\,p_{\mathrm{B}}+0.6$ である。この対応関係は図7のようにまとめられる。

他方，Bの期待利得は

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{B}} &= p_{\mathrm{A}}p_{\mathrm{B}}\cdot 0.6+p_{\mathrm{A}}(1-p_{\mathrm{B}})\cdot 0.3+(1-p_{\mathrm{A}})p_{\mathrm{B}}\cdot 0.2+(1-p_{\mathrm{A}})(1-p_{\mathrm{B}})\cdot 0.4 \\ &= 0.1p_{\mathrm{B}}(5p_{\mathrm{A}}-2)+0.4-0.1p_{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

となる。BはAによる $p_{\mathrm{A}}$ の値を所与として $p_{\mathrm{B}}$ を操作する。最適反応戦略は

$$5p_{\mathrm{A}}-2\left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} 0 \Leftrightarrow p_{\mathrm{A}}\left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} 2/5 \Rightarrow p_{\mathrm{B}}=\begin{cases} 1 \\ \text{all}\ \ p_{\mathrm{B}} \quad (1 \geqq p_{\mathrm{B}} \geqq 0) \\ 0 \end{cases}$$

である。$p_{\mathrm{A}}>2/5$ であれば，Bは $p_{\mathrm{B}}=1$ として読みをフォア狙いに絞る。逆

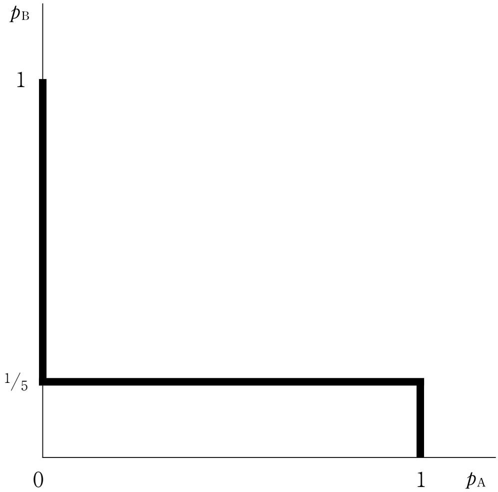


図 7

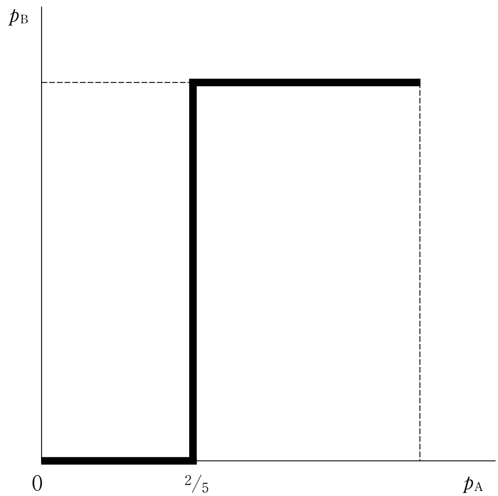


図 8

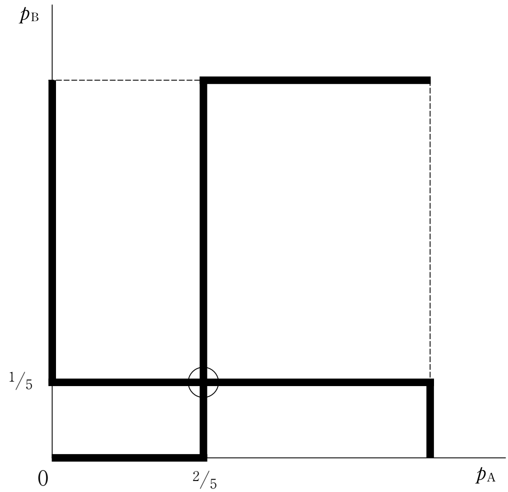


**図 9**

に $p_B < 2/5$ であれば，$p_A = 0$ として読みをバック狙いに絞ればよい。ちょうど $p_A = 2/5$ の際には $p_B$ の如何に拠らずＢの期待利得は $0.4 - 0.1p_A$ である。この対応関係は図８のように示される。そして両図を重ね合わせれば，その組合せとして混合戦略を考慮したときのナッシュ均衡は図９において示されている通り，両者の最適反応の交点により $(p_A, p_B) = (2/5, 1/5)$ となり，また均衡期待利得は (16/25，9/25) となっていることが確かめられる。Ａはサーブのコース打ち分けをＢのフォアハンド側に 2/5，バックハンド側に 3/5 の割合で行う。Ｂはフォアハンド側に 1/5，バックハンド側に 4/5 の割合でサーブを予想し動くことになる。

ケースⅡでは読みが外れた場合でもある程度対応できるようになったことが，Ｂの意識をフォアハンド側に向けるためのＡによる努力を弱めるよう作用している。つまりここではＡはＢの苦手なバックハンド側をより素直に攻めるようになり，それに対応してＢはフォア狙いを読んで裏をかかれることへの警

戒心を多少なりとも解くようになっている。とはいえ混合戦略によるナッシュ均衡は先のものと比較すると，Aによるフォア狙いの割合が引き下がっているにも拘わらず，Bによるフォアハンド側への読みの割合が逆に高まるようになっている。これは一見矛盾する結果といえよう。しかしこの点はむしろ先のケースで自らの不手際のため過度に裏をかかれることを警戒していたものが，ここではスキル・アップにより若干緩和されたと解釈し，正当化されるべきであろう。

### 4.3　ケースⅢ

今度はレシーバーBのスキルにケースⅡとはまた違った種類の変化が生じたものとしよう。つまりBはフォア狙いの読みを外したときのバックハンド対応の不味さは相も変わらずであるが，しかしバック狙いの読みを当てたときのバックハンド処理のスキルが向上することになった。このため表4のように数値が変更される。つまりリターンの成功率が40%から50%に高まり，他方でサーブの成功率が60%から50%に低まる。この点の変更を除いて，他の点ではケースⅠと同等としておく。この変化の影響を順を追って見てみると，次のようになろう。

**表4**

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | フォア | バック |
| A | フォア | 0.4，0.6 | 0.7，0.3 |
| | バック | 0.9，0.1 | 0.5，0.5 |

やはりここでもサーバーによるフォア狙いの確率は $p_A$，バック狙いの確率は $1-p_A$ であり，レシーバーのフォアハンドを読む確率は $p_B$，バックハンドを読む確率は $1-p_B$ である。先と同様に，Aが確率ベクトル $\mathbf{p}_A=(p_A,\ 1-p_A)$ where $1 \geqq p_A \geqq 0$，Bが確率ベクトル $\mathbf{p}_B=(p_B,\ 1-p_B)$ where $1 \geqq p_B \geqq 0$ と

の混合戦略を取ったときの両者の期待利得を求め，対応する最適反応戦略を導出し，その組合せとしてナッシュ均衡を求める。

Ａの期待利得は

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{A}} &= p_{\mathrm{A}}p_{\mathrm{B}}\cdot 0.4+p_{\mathrm{A}}(1-p_{\mathrm{B}})\cdot 0.7+(1-p_{\mathrm{A}})p_{\mathrm{B}}\cdot 0.9+(1-p_{\mathrm{A}})(1-p_{\mathrm{B}})\cdot 0.5 \\ &= 0.1p_{\mathrm{A}}(2-7p_{\mathrm{B}})+0.4p_{\mathrm{B}}+0.5 \end{aligned}$$

となる。ＡはＢによる $p_B$ の値を所与として $p_{\mathrm{A}}$ を操作する。最適反応戦略は

$$2-7p_{\mathrm{B}}\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}0 \Leftrightarrow p_{\mathrm{B}}\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}2/7 \Rightarrow p_{\mathrm{A}}=\left\{\begin{matrix}1\\ \text{a11}\ \ p_{\mathrm{A}} \quad (1\geqq p_{\mathrm{A}}\geqq 0)\\ 0\end{matrix}\right.$$

である。$p_B<2/7$ であれば，$p_{\mathrm{A}}=1$ としてフォア狙いに徹する。逆に $p_B>2/7$ であれば，$p_{\mathrm{A}}=0$ としてフォア狙いを取り止めバック狙いに徹すればよいことになる。ちょうど $p_B<2/7$ の際には $p_{\mathrm{A}}$ の如何に拠らずＡの期待利得は $0.4p_{\mathrm{B}}+0.5$ である。この対応関係は図 10 に示される通りである。

他方，Ｂの期待利得は

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{B}} &= p_{\mathrm{A}}p_{\mathrm{B}}\cdot 0.6+p_{\mathrm{A}}(1-p_{\mathrm{B}})\cdot 0.3+(1-p_{\mathrm{A}})p_{\mathrm{B}}\cdot 0.1+(1-p_{\mathrm{A}})(1-p_{\mathrm{B}})\cdot 0.5 \\ &= 0.1p_{\mathrm{B}}(7p_{\mathrm{A}}-4)+0.5-0.2p_{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

となる。ＢはＡによる $p_{\mathrm{A}}$ の値を所与として $p_B$ を操作する。最適反応戦略は

$$7p_{\mathrm{A}}-4\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}0 \Leftrightarrow p_{\mathrm{A}}\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}4/7 \Rightarrow p_{\mathrm{B}}=\left\{\begin{matrix}1\\ \text{a11}\ \ p_{\mathrm{B}} \quad (1\geqq p_{\mathrm{B}}\geqq 0)\\ 0\end{matrix}\right.$$

である。$p_{\mathrm{A}}>4/7$ であれば，$p_{\mathrm{B}}=1$ として読みをフォア狙いに絞る。逆に $p_{\mathrm{B}}<4/7$ であれば，$p_{\mathrm{A}}=0$ としてバック狙いに絞ればよい。ちょうど $p_{\mathrm{A}}=4/7$ の際には $p_B$ の如何に拠らずＢの期待利得は $0.5-0.2p_{\mathrm{A}}$ である。この対応関係は図 11 のようにまとめられる。そして両図を重ね合わせれば，その組合せとして混合戦略を考慮したときのナッシュ均衡は図 12 において交点

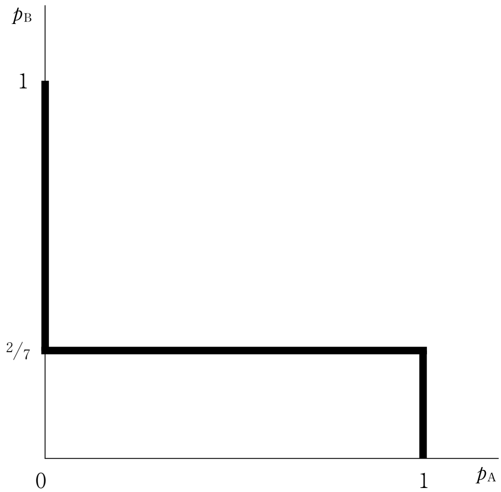


**図10**

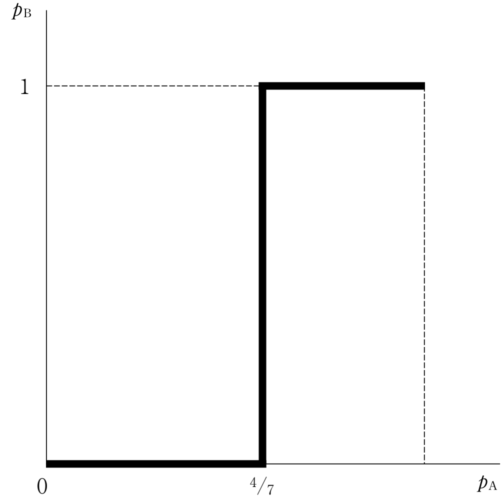


**図11**

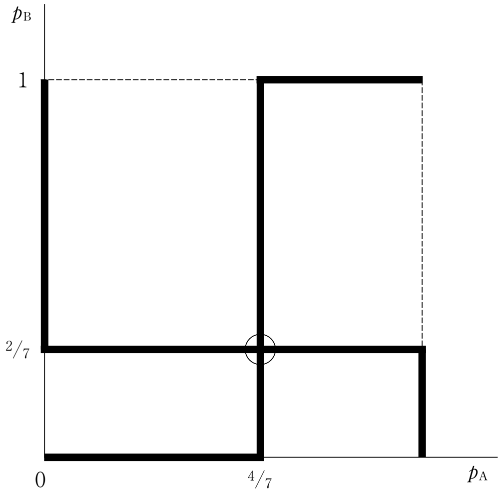


図12

$(p_A, p_B)=(4/7, 2/7)$，そこでの均衡期待利得は (43/70，27/70) となっていることが確かめられる。Aはサーブのコース打ち分けをBのフォアハンド側に4/7，バックハンド側に3/7 の割合で行う。Bはフォアハンド側に2/7，バックハンド側に5/7 の割合でサーブを予想し動くことになる。

以前のBはバックハンド処理自体が苦手というだけでなく，フォアハンド側を予想しているときに裏をかかれてバックハンド側を攻められることをそれ以上に苦にしていた。今や読みが当たってさえいればバックハンド処理は向上し，50％のリターン成功率となったのである。Aは相対的に不利となったバックハンド狙いの割合を低めようとする。そして更には敢えてバックハンド側を狙うのであれば，より一層Bにフォアハンド側を意識させた上でなければできなくなる。もちろんその代償としてフォアハンドを的確に読まれたときには，先と同様に60％のリターン成功率を甘受せねばならないことはいうまでもない。このようにして両効果相俟って57％(4/7) という割合でフォアハンド狙いを高めることになっている。

ここではＢの読みが当たった際，不得意なバックハンド処理を克服しつつあることが，ＡにとってそのままＢによるバックハンドのリターンを恐れるだけではなく, Ｂの意表を突くことのメリットをも相対的に増大させ,併せてフォア狙いのインセンティブを増大させている。このようにしてケースⅢでは結果的にＡによるサーブのフォア狙いの頻度を高めるよう作用し，そしてそれに合わせてＢは極自然にフォア狙いの読みの割合を高めるよう対応しているのである。

## お わ り に

コイン合わせのように100％プレイヤー間で利害の対立するゲームでは，純粋戦略の枠組みの中だけではナッシュ均衡を得ることは決してできない。そのようなゲームでは，混合戦略まで考察の対象を広げ，純粋戦略を確率的に決めるものと見なすことによって，新たに均衡を見出しうるようになる。本稿ではこの点を明らかにし，混合戦略についての幾つかの応用例を確認した。次稿ではプレイヤー間で利害が共通する部分を含むゲームにおける混合戦略の適用例と更に進化ゲームへの関連性についても見てみることにする。

**注**

1）ナッシュ均衡とその応用例についての議論は松本（2004）を参照されたい。

2）これまでは戦略という概念を，複数の選択肢の中からある１つだけを選び取る意思決定の問題と関連付け，その解釈をしてきたことになる。

3）純粋戦略のみによってナッシュ均衡が得られるケースにおいてさえ，依然としてこの種の混合戦略の考え方は有効である。既に純粋戦略ナッシュ均衡が得られていても，それとは別に他に混合戦略ナッシュ均衡が求められるかもしれないからである。これについては次稿で取り上げたい。

4）コイン合わせに限らず，混合戦略ナッシュ均衡に関するより一般的でかつ厳密な議論は Fudenberg and Tirole（1991），岡田（1996）等を参照のこと。

5）本稿では一方のプラスは他方のマイナスとなる定和ゲームや更に特殊なゼロ和ゲームに議論が限定されているため，そもそもマックスミニ・ミニマックス混合戦略により導出されるゲームの値を求めること（ミニマックス定理）で，ここでのナッシュ均衡に代えることができる。場合によってはこの最悪の事態を想定し，その下で最善策を探る前者のやり

方の方が，直感に訴える点で説明には適しているかもしれない。しかし次稿でのより一般的なゲーム的状況における議論と関連させるため，ここでは一部を除いて非定和ゲームに合わせた導出方法を取っている。

6) ここのゲーム的状況では確率（頻度）の決定はプレイヤーの技術や選好を反映している。そして混合戦略を使用するときであっても結果的には自分の意思で純粋戦略の何れかを選び取っている。つまり混合戦略とはいえプレイヤー自らにとっては最終的には確定したものといえなくもないのである。しかしこのようにプレイヤー自身には選択がはっきりしていてさえも事前には他の観察者にとってはその取る行動がランダムに見える。あるいは相手にそう見えるように意図的にランダム化を工夫する。その意味ではやはり情報の非対称性という不確実性がそこに抜き難く存在し，当該プレイヤーに関する私的情報となっている。相手プレイヤーの混合戦略とは，純粋戦略の採用に付随して発生する不確実性に関するものであり，相手に対して抱かせうる信念と成る。このような混合戦略の意味付けと解釈の仕方については，Gibbons（1992），Osborne and Rubinstein（1994），Bierman and Fernandez（1998），Rasmusen（2001）等をそれぞれ参照されたい。

7）堀他（1995），MaCain（2004）等を参照のこと。

8）ほぼ同じ問題をより易しく論じたものに，Dixit and Nalebuff（1991）がある。そこでは，注 5）でも触れたが，本稿で展開しなかった最悪の事態を想定した上で，その中での最善の道を探る方法により，解が求められている。

9）もちろんこのときレシーバーにはバック狙いのサーブをフォアに回り込んでリターンする余裕はないものとする。

## 参　考　文　献


Bierman, H. S. and L. Fernandez（1998）*Game Theory with Economic Applications,* Reading: Addison-Wesley.

Dixit, K. D. and B. J. Nalebuff（1991）*Thinking Strategically,* New York: Norton.　菅野隆·嶋津裕一訳　『戦略的思考とは何か』TBS ブリタニカ，1991 年。

Fudenberg, D. and J. Tirole（1991）*Game Theory,* Cambridge: MIT Press.

Gibbons, R.（1992）*Game Theory for Applied Economists,* Princeton: Princeton University Press.　福岡正夫·須田伸一訳　『経済学のためのゲーム理論入門』　創文社，1995 年。

McCain, R. A.（2004）*Game Theory,* Mason: South-Western

Osborne, M. J. and A. Rubinstein（1994）*A Course in Game Theory,* Cambridge: MIT Press.

Rasmusen, E.（2001）*Games and Information,* 3 rd ed., Malden: Blackwell.　細江守紀·村田省三·有定愛展訳　『ゲーム理論と情報の経済分析Ⅰ·Ⅱ』　九州大学出版会，1989，1991 年。

岡田章（1996）『ゲーム理論』有斐閣。

堀義人他·株式会社グロービス編（1995）『MBA マネジメント·ブック』　ダイヤモンド社。

松本直樹（2004）『ゲーム理論の基礎と応用』松山大学総合研究所。